

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP SIMP TRONG TỐI ƯU HÓA KẾT CẤU DẦM

APPLICATION OF THE SIMP METHOD FOR STRUCTURAL OPTIMIZATION OF BEAMS

Bùi Thị Thanh Mai¹, Lê Đăng Dũng², Nguyễn Hoàng Quân³, Đỗ Văn Linh⁴

^{1,2,3,4}Trường Đại học Giao Thông Vận Tải

Email: ¹bttmai@utc.edu.vn, ²ledangdung@utc.edu.vn, ³quannh_ktxd@utc.edu.vn, ⁴dvlinh@utc.edu.vn

DOI: <https://doi.org/10.59382/hnkh17-ibst.2025.ses2-21>

TÓM TẮT: Tối ưu hóa hình thái (topology optimization) là một kỹ thuật tính toán nhằm tìm ra phân bố tối ưu của vật liệu trong một miền thiết kế cho trước nhằm đạt hiệu quả về mặt chịu lực với các điều kiện ràng buộc về thể tích, tải trọng, điều kiện biên. Bài báo nhằm mục đích trình bày và áp dụng phương pháp SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) dựa trên nền tảng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) để tối ưu hóa hình học của các cấu kiện dầm chịu lực. Kết quả mô phỏng cho thấy phương pháp này mang lại hiệu quả cao trong việc thiết kế hình dạng tối ưu cho các cấu kiện dầm, góp phần nâng cao hiệu suất sử dụng vật liệu.

TỪ KHÓA: Tối ưu hóa kết cấu, phương pháp SIMP, phần tử hữu hạn

ABSTRACT: Topology optimization is a computational technique used to determine the optimal material distribution within a given design domain in order to achieve structural efficiency under constraints such as volume, loading, and boundary conditions. This paper aims to present and apply the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) method, based on the finite element method (FEM), to perform topology optimization of load-bearing beam components. The simulation results demonstrate that this method is highly effective in designing optimal geometries for beam structures, thereby enhancing material utilization efficiency.

KEYWORDS: Topology optimization, SIMP, FEM.

1. GIỚI THIỆU

Tối ưu hóa hình thái (Topology optimization-TO) là một công cụ toán học mạnh mẽ nhằm bố trí vật liệu một cách tối ưu trên một miền thiết kế cho trước, dưới các điều kiện về tải trọng, điều kiện biên và các ràng buộc về hiệu năng nhất định [1,2]. Tối ưu hóa hình thái cho phép tạo ra nhiều dạng kết cấu mới có tính năng cơ học vượt trội, tiết kiệm vật liệu. Đến thời điểm hiện tại, tối ưu hóa hình thái đã cho thấy khả năng ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như thiết kế kết cấu [3,4], tối ưu hóa khả năng truyền nhiệt [5,6], chế tạo các thiết bị điện tử có hiệu năng lớn [7,8].

Cơ sở lý thuyết của tối ưu hóa hình thái được đặt nền móng bởi Bendsøe và Kikuchi (1988) [9], những người đầu tiên giới thiệu phương pháp dựa trên kỹ thuật đồng nhất hóa. Sau đó, Bendsøe và Sigmund [10,11] đã phát triển và phổ biến phương pháp SIMP (Solid Isotropic Material with

Penalization). Ý tưởng chính của SIMP là làm mềm bài toán rời rạc dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn bằng cách cho phép mật độ vật liệu p của từng phần tử thay đổi liên tục trong khoảng $[0,1]$, trong đó $p = 0$ ứng với phần rỗng, $p = 1$ ứng với vùng có vật liệu. Cho đến nay, đây là phương pháp được sử dụng rộng rãi nhất nhờ tính đơn giản, dễ dàng triển khai và có hiệu quả tính toán cao.

Tại Việt Nam, nghiên cứu về tối ưu hóa hình thái đã dần nhận được sự quan tâm trong khoảng một thập kỷ trở lại đây, chủ yếu trong các lĩnh vực xây dựng và cơ khí. Một số công trình đã khảo sát ứng dụng tối ưu hóa hình thái cho các bộ phận kết cấu như giàn, khung và bản mỏng, cho thấy tiềm năng giảm đáng kể lượng vật liệu sử dụng trong khi vẫn đảm bảo an toàn và khả năng làm việc. Tuy nhiên, đa số các nghiên cứu hiện có trong nước mới chỉ dừng ở mức sử dụng phần mềm thương mại hoặc các công thức lý thuyết, trong khi việc phát triển và minh họa các mã nguồn đơn

giản, mang tính chất giáo dục và thực hành còn hạn chế. Nhiều phần mềm mã nguồn mở đã được phổ biến như chương trình tối ưu hóa hình thái được phát triển bởi Liu và các cộng sự [12] cho Femlab, chương trình tối ưu hóa hình thái phát triển bởi Hunter [13] trên Python, chương trình tối ưu hóa cho kết cấu dạng giàn Michell phát triển bởi Sokół [14] trên Mathematica.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi trình bày một số ví dụ đàm được triển khai tối ưu hóa hình thái 3D bằng chương trình top3d viết trên nền tảng Matlab. Đây là chương trình mã nguồn mở được phát triển bởi Liu và Tovar [15]. Việc lựa chọn Matlab xuất phát từ tính đơn giản, khả năng phổ biến rộng rãi trong môi trường học thuật, cũng như khả năng trực quan hóa kết quả tối ưu hóa.

Bài báo được bố cục như sau: phần 2 dành cho việc tóm tắt lý thuyết của phương pháp SIMP, phần 3 là các ví dụ áp dụng phương pháp này cho việc thiết kế đàm chịu các tải trọng khác nhau, cuối cùng là kết luận và kiến nghị.

2. NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

2.1 Tóm tắt lý thuyết của phương pháp SIMP

Phương pháp SIMP được đề xuất bởi Bendsøe và Sigmund [10,11] được sử dụng phổ biến trong tối ưu hóa hình thái. Ý tưởng chính của SIMP là làm mềm bài toán rời rạc của phương pháp phần tử hữu hạn bằng cách cho phép mật độ vật liệu x_i của từng phần tử thay đổi liên tục trong khoảng $[0,1]$. Trong đó $x_i = 0$ ứng với phần tử rỗng, $x_i = 1$ ứng với vùng có vật liệu. Theo đó, mô đun đàn hồi của phần tử thứ i được định nghĩa như sau:

$$E_i = E_i(x_i) = E_{\min} + x_i^p (E_0 - E_{\min}), x_i \in [0,1] \quad (1)$$

Trong phương trình (1), $E_{\min}$ là mô đun đàn hồi của vật liệu rỗng, $E_{\min}$ nhận giá trị rất nhỏ để tránh cho ma trận độ cứng bị suy biến. $x_i \in [0,1]$ mật độ vật liệu của phần tử. p hệ số mũ phạt (penalization power), $p > 1$.

Để tránh các vấn đề khi giải số như kết quả phụ thuộc lưới phần tử hữu hạn, hiện tượng xuất hiện các ô đặc - rỗng xen kẽ giống bàn cờ trong kết quả tối ưu, dẫn đến không thực tế về mặt cơ học và thiếu ổn định số, mật độ vật liệu được chuẩn hóa thông qua bộ lọc mật độ được định nghĩa như sau:

$$\tilde{x}_i = \frac{\sum_{j \in N_j} H_{ij} v_j x_j}{\sum_{j \in N_i} H_{ij} v_j} \quad (2)$$

Trong phương trình (2), N_j là vùng lân cận của phần tử i với thể tích v_j , hàm trọng số H_{ij} . Vùng lân cận được định nghĩa như sau:

$$N_j = \{j: \text{dist}(i, j) \leq R\} \quad (3)$$

với toán tử $\text{dist}(i, j)$ là khoảng cách giữa tâm phần tử i và tâm phần tử j , còn R là bán kính vùng lân cận hay kích thước bộ lọc. Hệ số trọng số H_{ij} có thể được xác định như một hàm theo khoảng cách giữa các phần tử lân cận, ví dụ:

$$H_{ij} = R - \text{dist}(i, j), j \in N_i \quad (4)$$

Mô đun đàn hồi của phần tử thứ i được định nghĩa sau khi đã được chuẩn hóa được viết lại như sau:

$$E_i(\tilde{x}_i) = E_{\min} + \tilde{x}_i^p (E_0 - E_{\min}), \tilde{x}_i \in [0,1] \quad (5)$$

2.2. Rời rạc hóa bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Dựa trên phương pháp SIMP được chuẩn hóa dựa theo phương trình (5) và định luật Hooke dạng tổng quát, tenxơ độ cứng đẳng hướng cho phần tử thứ i được tính cho phần tử rỗng và đặc như sau:

$$C_i(\tilde{x}_i) = E_i(\tilde{x}_i) C_i^0, \tilde{x}_i \in [0,1] \quad (6)$$

Trong đó: C_i^0 là tenxơ độ cứng ứng với mô đun đàn hồi đơn vị, được định nghĩa như sau:

$$C_i^0 = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Với ν là hệ số Poisson

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, độ cứng của phần tử thứ i , được tính từ tích phân khối của tenxơ độ cứng $C_i(\tilde{x}_i)$ và đạo hàm của hàm dạng $\mathbf{B}$ theo công thức sau:

$$k_i(\tilde{x}_i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T C_i(\tilde{x}_i) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (8)$$

ξ_e ($e = 1, 2, 3$) là tọa độ tự nhiên của phần tử khối 8 nút. Hàm dạng $\mathbf{B}$ thể hiện mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị theo phương trình sau, $\epsilon = \mathbf{B} \mathbf{u}$. Trong phương pháp SIMP, độ cứng của phần tử i có thể được nội suy từ tenxơ độ cứng đơn vị như sau:

$$k_i^0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T C_i^0 \mathbf{B} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (9)$$

Ma trận độ cứng tổng thể $\mathbf{K}$ thu được từ độ cứng của từng phần tử theo công thức sau:

$$K(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n k_i(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n E_i(\tilde{x})k_0 \quad (10)$$

Sử dụng khái niệm ma trận độ cứng tổng thể đơn vị, phương trình (10) có thể được viết lại như sau:

$$K(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n k_i(\tilde{x}_i) = \sum_{i=1}^n E_i(\tilde{x}_i)k_0 \quad (11)$$

Kết hợp với phương trình (5), ta thu được ma trận độ cứng tổng thể như sau:

$$K(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n \left(E_{\min} + \tilde{x}_i^p (E_0 - E_{\min}) \right) K_0^i \quad (12)$$

Véc tơ chuyển vị là nghiệm của phương trình sau:

$$K(\tilde{x})U(\tilde{x}) = F \quad (13)$$

Trong đó, F là véc tơ lực

2.3. Tối thiểu hóa độ mềm dẻo

Mục tiêu của bài toán tối ưu hóa hình thái là tìm hàm phân bố vật liệu $\tilde{x}$, để tối thiểu hóa biến dạng của kết cấu với điều kiện biên và tải trọng cho trước. Nói cách khác, mục tiêu của bài toán là tối thiểu hóa độ mềm dẻo $c(\tilde{x})$, hay tối đa hóa độ cứng được định nghĩa như sau:

$$c(\tilde{x}) = F^T U(\tilde{x}) \quad (14)$$

Kết hợp với điều kiện ràng buộc về thể tích, bài toán tối thiểu hóa độ mềm dẻo có thể được định nghĩa như sau:

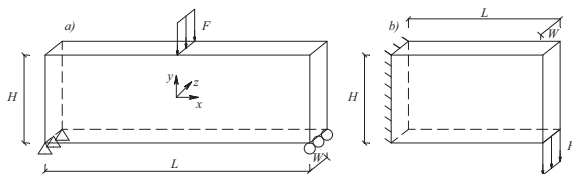
Tìm $\tilde{x} = [x_1, x_2, \dots, x_e, \dots, x_n]^T$ tối thiểu hóa độ mềm dẻo $c(\tilde{x}) = F^T U(\tilde{x})$ thỏa mãn điều kiện

$$v(\tilde{x}) = \tilde{x}^T v = -\bar{v} = 0;$$

$$x \in \chi, \chi = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq 1\}$$

Trong đó $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, véc tơ thể tích của từng phần tử.

3. VÍ DỤ ÁP DỤNG



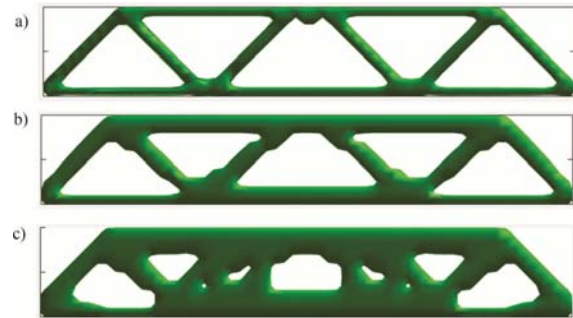
Hình 1: Mô hình hình học và điều kiện biên của mẫu dầm 3D sử dụng để tối ưu hóa hình thái

Trong mục này, hai ví dụ dầm được tiến hành tối ưu hóa hình thái để cho thấy hiệu quả của mô hình tối ưu hóa hình thái. Ví dụ thứ nhất là dầm

chịu uốn ba điểm (hình 1a), ví dụ thứ hai là dầm công son chịu tải trọng ở đầu tự do (hình 1b). Ở trạng thái ban đầu, các mẫu dầm được giả thiết là các dầm đặc. Hệ số Poisson của vật liệu dầm được lấy bằng 0,3. Mô đun đàn hồi và giá trị lực tác dụng được lấy bằng đơn vị. Để tránh ma trận độ cứng bị suy biến, mô đun đàn hồi của vật liệu rỗng được lấy bằng $E_{\min} = 10^{-9}$.

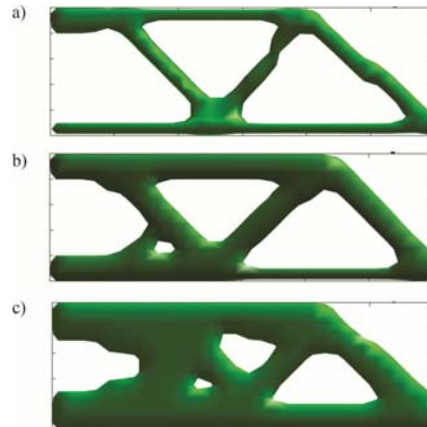
3.1. Dầm chịu uốn ba điểm

Mẫu dầm chịu uốn ba điểm được rời rạc hóa bằng các phần tử lập phương 8 nút, với số lượng phần tử thể hiện phương x, y, z lần lượt là $60 \times 10 \times 2$. Hình 2 a, b, c thể hiện kết quả tối ưu hóa hình thái của dầm chịu uốn 3 điểm với tỷ lệ thể tích lần lượt là 30%, 50% và 70%. Mặc dù có tỷ lệ thể tích khác nhau nhưng có thể nhận thấy rằng các mẫu dầm được tối ưu hóa hình thái về kết cấu giàn, với tính chất đối xứng. Tại điểm đặt lực nhìn chung hình thành các thanh chéo nhằm mục đích truyền lực về hai gối. Tại vị trí của gối tựa các mẫu dầm được bo góc nhằm giảm hiện tượng tập trung ứng suất.



Hình 2: Tối ưu hóa hình thái của dầm chịu uốn 3 điểm với tỷ lệ thể tích a) 30% b) 50%, c) 70%

3.2 Dầm công son



Hình 3: Tối ưu hóa hình thái của dầm công son với tỷ lệ thể tích a) 30% b) 50% c) 70%

Mẫu dầm công son chịu tải trọng tập trung được rời rạc hóa bằng các phần tử lập phương 8 nút, với số lượng phần tử theo 3 phương x, y, z lần lượt là $30 \times 10 \times 2$. Kết quả tối ưu hóa hình thái của dầm công son chịu tải trọng tập trung với tỷ lệ thể tích 30%, 50% và 70% lần lượt được thể hiện trên hình 3. Mặc dù tỷ lệ thể tích khác nhau nhưng quan sát thấy rằng các mẫu dầm có một số điểm chung như: (i) Các mẫu dầm đều có xu hướng hình thành hệ thanh xiên chính từ vị trí đặt tải đến gối tựa, tạo ra đường truyền lực trực tiếp nhất, (ii) Vùng đặt tải và gối tựa được gia cường bằng các thanh dày hoặc góc bo tròn.

4. KẾT LUẬN

Nghiên cứu trình bày mô hình tối ưu hóa hình thái 3D dựa trên phần mềm mã nguồn mở top3D được phát triển bởi Lui và Tovar [15]. Hai mẫu dầm được tối ưu hóa hình thái bao gồm dầm chịu uốn 3 điểm và dầm công son chịu lực ở đầu tự do với tỷ lệ thể tích khác nhau 30% -50%-70%. Nhìn chung các kết quả thu được từ tối ưu hóa hình thái phù hợp với cơ chế truyền lực trong các mẫu dầm. Đây là cơ sở đầu tiên để chúng tôi tiếp tục phát triển mô hình tối ưu hóa hình thái cho các bài toán khác như tối ưu hóa hình thái trong các cấu kiện được cấu tạo từ nhiều vật liệu thành phần chịu các tải trọng phức tạp, kết hợp tối ưu hóa hình thái với phương pháp trường pha nhằm mô phỏng sự lan truyền vết nứt, đánh giá khả năng làm việc của các cấu kiện được tối ưu hóa hình thái.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Y. Zheng, W. Qiu, X. Liu, Z. Huang, L. Xia (2025). Damage-tolerant mechanical metamaterials designed by fail-safe topology optimization, *Material & Design* 249.
- [2] P. Dong, J. Hu, C. Lin, W. Ding, J. Liu, Y. Liu (2024). Topology-optimized lattice enhanced cementitious composites, *Material & Design* 244.
- [3] X. Xie, J. Bai, W. Zuo (2024), Topology optimization of fiber-reinforced concrete structures using membrane-embedded model, *Engineering Structure* 314.
- [4] T. Golecki, F. Gomez, J. Carrion, B.F. Spencer (2023) Bridge topology optimization considering stochastic moving traffic, *Engineering Structure* 292 (2023).
- [5] Q. Yang, L. Chen, H. Ke, L. Gu, X. Zheng, S. Li, et al. (2024), Multi-layer topology optimization of dual-fluid convective heat transfer in printed circuit heat exchangers, *Applied Thermal Engineering* 257.
- [6] Z. Sun, J. Dai, Y. Wang, Y. Luo (2024), Multiscale concurrent topology optimization for heat conduction with connectable microstructures. *International journal of heat and mass transfer* 235
- [7] C. Liu, Z. He, C. Lü, G. Wang (2024), Concurrent topology optimization of multiscale piezoelectric actuators, *International Journal of Solids and Structures* 290.
- [8] B.V. de Almeida, R. Pavanetto, M. Langelaar (2024), Topology optimization of smart structures with embedded piezoelectric stack actuators using a composite geometry projection method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 429.
- [9] M.P. Bendsøe, N. Kikuchi (1988), Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 71 (2), 197.
- [10] Sigmund, O. (2001). A 99-line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2): 120–127.
- [11] Bendsøe, Martin & Sigmund, Ole. (2003). *Topology Optimization: Theory, Method and Applications*.
- [12] Liu Z, Korvink JG, Huang I (2005) Structure topology optimization: fully coupled level set method via FEMLAB. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 6(29):407–417.
- [13] Hunter W (2009) Predominantly solid-void three-dimensional topology optimisation using open urce software. Master's thesis, University of Stellenbosch.
- [14] Sokół T (2011), A 99 line code for discretized michell truss optimization written in mathematica. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43(2):181–190.
- [15] Liu, K., Tovar, A (2014). An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 50, 1175–1196(2014)