

TÍNH TOÁN KẾT CẤU TẤM LÀM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN FGM CÓ KÈ ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

ThS. **NGUYỄN TRÍ DŨNG**

Viện KHCN Xây dựng

TS. Đại Úy. **ĐẶNG SỸ LÂN**

Đại học Phòng cháy chữa cháy

Tóm tắt: Bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (PP PTHH) để tính toán độ võng và ứng suất của tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally graded material-FGM) chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Phần tử đẳng tham số chín nút mỗi nút gồm năm bậc tự do được sử dụng để mô hình phần tử tấm. Kết quả số được khảo sát với các trường hợp khác nhau và được so sánh với các kết quả đã được công bố của tác giả khác cho thấy độ tin cậy của thuật toán và chương trình.

Từ khóa: FGM, vật liệu có cơ tính biến thiên, phần tử hữu hạn, tải trọng nhiệt độ.

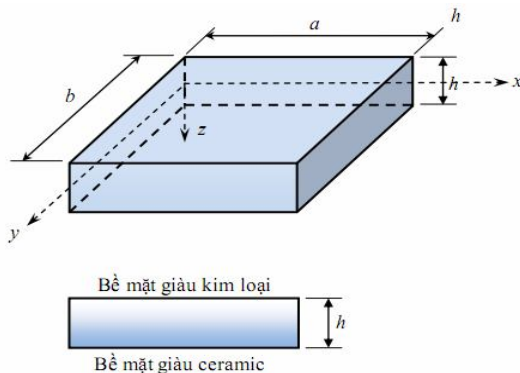
1. Mở đầu

Vật liệu FGM là một loại composite thể hệ mới, được ứng dụng trong kỹ thuật hàng không (chế tạo thân vỏ máy bay), trong y học (chế tạo răng, xương nhân tạo), trong quốc phòng (áo giáp chống đạn), trong công nghiệp năng lượng (tấm cách nhiệt, tua bin, lò phản ứng)... Vật liệu FGM được kết hợp từ 2 vật liệu trong đó tỷ lệ thể tích của mỗi thành phần biến đổi một cách trơn và liên tục từ mặt này sang mặt kia theo chiều dày thành kết cấu (hình 1). Hàm đặc trưng cho các hằng số vật liệu FGM giả thiết dưới dạng:

$$V(z) = (V_c - V_m) \cdot g(z) + V_m \quad (1)$$

$$g(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (2)$$

Trong đó: V_m - hằng số vật liệu của vật liệu mặt trên tấm ($-h/2$); V_c - hằng số vật liệu của vật liệu mặt dưới tấm ($+h/2$); $V(z)$ - hằng số vật liệu của vật liệu tại tọa độ z bất kỳ; p - tham số vật liệu (chỉ số tỉ lệ thể tích); h - chiều dày.



Hình 1. Mô hình kết cấu làm từ vật liệu FGM

Trên thế giới có nhiều nghiên cứu về ứng xử cơ nhiệt của tấm FGM trong môi trường nhiệt độ. Wang và Tarn [1, 2] sử dụng phương pháp khai triển tiệm cận (asymptotic expansion) phân tích ba chiều tấm không đồng nhất. Thay vì giải chính xác phương trình truyền nhiệt, các tác giả giả định trước trường nhiệt độ trong vật liệu FGM. Aboudi và cộng sự [3] phân tích ứng xử đàn - nhiệt của tấm FGM theo lý thuyết bậc cao. Đáp ứng phi tuyến đàn - nhiệt của tấm FGM gồm/kim loại được khảo sát bởi Praveen và Reddy [4] bằng phương pháp phần tử hữu hạn theo lý thuyết tấm von-Karman.

Reddy và Chin [5] tiến hành nghiên cứu lý thuyết cũng như phân tích phần tử hữu hạn ứng xử nhiệt - cơ của ống trụ và tấm FGM. Biến dạng nhiệt - cơ của tấm e-lip ngâm trên chu vi được phân tích bởi Cheng và Batra [6].

Ở Việt Nam, các công bố của các tác giả trong nước về các kết cấu bằng vật liệu FGM trong thời gian gần đây tăng nhanh. Các tác giả Đào Huy Bích và cộng sự [7], Trần Ích Thịnh [8], Trần Minh Tú, Nguyễn Bích Phượng [9] phân tích trường chuyển vị và ứng suất trong tấm FGM theo lý thuyết tấm cổ điển. Huỳnh Vinh [10], Trần Thị Nhật Nguyên [11] phân tích tĩnh và động tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Tuy nhiên, trong các nghiên cứu này, yếu tố nhiệt độ chưa được xét đến.

Bài báo này sử dụng phương pháp PTHH với phần tử đẳng tham số 9 nút, mỗi nút 5 bậc tự do dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để tính độ võng và ứng suất trong tấm làm bằng vật liệu FGM chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1 Sự thay đổi tính chất của vật liệu FGM theo nhiệt độ

Với tấm bằng vật liệu FGM, các hằng số vật liệu biến thiên liên tục theo tọa độ chiều dày tấm, chẳng hạn mô-đun đàn hồi $E=E(z)$. Ta có công thức xác định các hằng số vật liệu (mô-đun đàn hồi E và hệ số giãn nở nhiệt α) như sau:

$$E = (E_t - E_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_b; \quad \alpha = (\alpha_t - \alpha_b) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \alpha_b \quad (3)$$

Ngoài ra, khi làm việc trong môi trường nhiệt độ, các hằng số vật liệu cũng là hàm số của nhiệt độ tuyệt đối T (theo nhiệt độ Kelvin, 0° C ứng với 273K). Theo Yang J. và Shen H. S [12], các hằng số vật liệu E, α được biểu diễn dưới dạng:

$$E_t = E_0^t (E_{-1}^t T^{-1} + 1 + E_1^t T + E_2^t T^2 + E_3^t T^3), \quad E_b = E_0^b (E_{-1}^b T^{-1} + 1 + E_1^b T + E_2^b T^2 + E_3^b T^3) \quad (4)$$

$$\alpha_t = \alpha_0^t (\alpha_{-1}^t T^{-1} + 1 + \alpha_1^t T + \alpha_2^t T^2 + \alpha_3^t T^3), \quad \alpha_b = \alpha_0^b (\alpha_{-1}^b T^{-1} + 1 + \alpha_1^b T + \alpha_2^b T^2 + \alpha_3^b T^3) \quad (5)$$

trong đó,

$E_{-1}, E_1, E_2, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - các hằng số phụ thuộc vào từng loại vật liệu;

E_0, α_0 - Giá trị của hằng số vật liệu tại nhiệt độ phòng T_0 ($T_0 = 27^\circ C \approx 300 K$);

T - Nhiệt độ khảo sát, tính theo Kelvin ($T = T_0 + \Delta T$).

2.2 Mô hình phần tử hữu hạn tấm FGM chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ – nhiệt

2.2.1 Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner – Mindlin [13]

Reissner, Mindlin giả thiết trường chuyển vị bậc nhất dưới dạng sau:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \quad (6)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

u_0, v_0, w_0 - các thành phần chuyển vị của mặt trung bình theo các phương x, y, z

θ_x, θ_y - các góc xoay của mặt pháp tuyến quanh hai trục y, x.

Biến dạng được suy ra từ chuyển vị bằng cách sử dụng quan hệ chuyển vị - biến dạng trong lý thuyết đàn hồi. Khi có tác dụng đồng thời của tải trọng cơ học và nhiệt độ thì trường biến dạng được xác định bằng nguyên lý cộng tác dụng.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon\}^{ch} + \{\varepsilon\}^T \\ \{\varepsilon\}^{ch} &: \text{Biến dạng do tải trọng cơ học gây ra.} \Rightarrow \\ \{\varepsilon\}^T &: \text{Biến dạng do nhiệt gây ra.} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \alpha \Delta T \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \alpha \Delta T \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \alpha \Delta T \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{array} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Với giả thiết bỏ qua thành phần ứng suất theo phương z, biểu thức ứng suất trong phân tử tấm FGM được xác định như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \alpha \Delta T \quad (8)$$

Trong đó các số hạng của ma trận [C] xác định như sau:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)}; \quad C_{12} = \frac{\nu(z)}{1 - \nu^2(z)} E(z); \quad C_{66} = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} \quad (9)$$

Tích phân biểu thức (8) dọc theo chiều dày tấm ta thu được biểu thức biểu diễn các thành phần nội lực:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{ND} \\ M_{ND} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$Q = S\gamma \tag{11}$$

Trong đó: $N^t = \{N_x, N_y, N_{xy}\}$; $M^t = \{M_x, M_y, M_{xy}\}$ (12)

$$\varepsilon^t = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}; \kappa^t = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\} \tag{13}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x^{ND} & M_x^{ND} \\ N_y^{ND} & M_y^{ND} \\ N_{xy}^{ND} & N_{xy}^{ND} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix} (1, z) T dz \tag{14}$$

$$Q^t = (Q_{yz}, Q_{xz}); \gamma^t = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\} \tag{15}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{16}$$

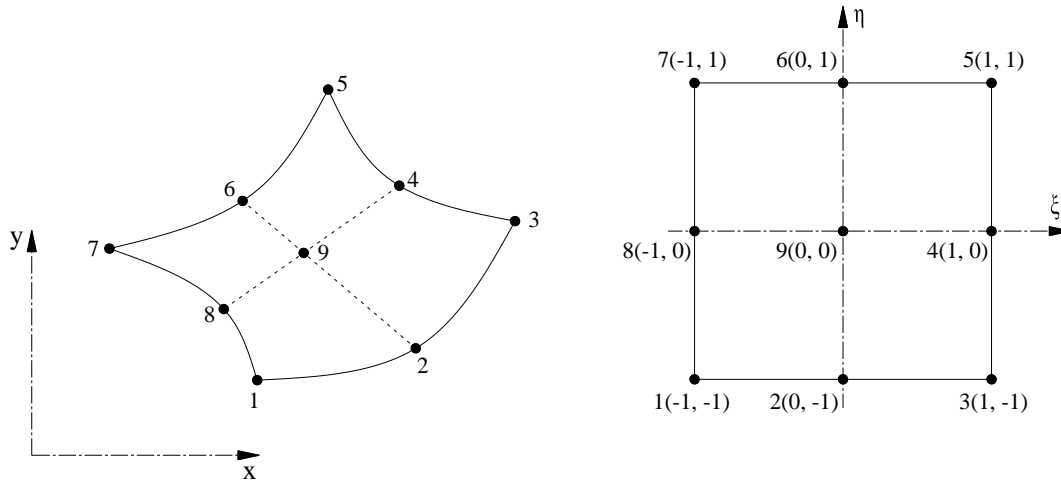
$$S = \begin{bmatrix} S_{66} & 0 \\ 0 & S_{66} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Với $(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j=1,2,6)$ (18)

$$S_{66} = \frac{5}{6} \int_{-h/2}^{h/2} C_{66} dz \quad \left(\frac{5}{6} \text{ là hệ số hiệu chỉnh cắt}\right) \tag{19}$$

2.2.2 Mô hình phần tử hữu hạn

a. Lựa chọn phần tử



Hình 2. Phần tử tứ giác đẳng tham số 9 nút

Với phần tử tứ giác đẳng tham số 9 nút, phần tử quy chiếu là hình vuông có các tọa độ nút theo hệ tọa độ tự nhiên cho trong hình 2b còn phần tử thực là phần tử tứ giác 9 nút có biên cong hoặc thẳng như trong hình 2a.

Chuyển vị của một điểm bất kỳ trong phần tử có thể viết dưới dạng sau:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^9 [N] \{q_i\} \tag{20}$$

Với $\{q_i^t\} = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}$ là chuyển vị tại các nút phần tử.

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \text{ là ma trận các hàm dạng.}$$

Từ đó, ta có:

$$\{\varepsilon\} = [B_1]\{q_e\}; \{\kappa\} = [B_2]\{q_e\}; \{\gamma\} = [B_3]\{q_e\} \quad (21)$$

Trong đó:

$$[B_1]_{3 \times 45} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(9)}; [B_2]_{3 \times 45} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}_{(9)}; [B_3]_{2 \times 45} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(9)}$$

Là các ma trận tính biến dạng.

Thế năng biến dạng đàn hồi trong phần tử tám được viết như sau:

$$U^e = \frac{1}{2} \iint (\varepsilon^t A \varepsilon + \varepsilon^t B \kappa + \kappa^t B \varepsilon + \kappa^t D \kappa + \gamma^t S \gamma - \varepsilon^t N^{ND} - \kappa^t M^{ND}) dA \quad (22)$$

Thay (21) vào (22), thế năng biến dạng đàn hồi được viết lại như sau:

$$U^e = \frac{1}{2} \{q_e\}^t ([K_e] \{q_e\} - f_e) \quad (23)$$

Trong đó:

$$[K_e] = \iint [B_1]^t A [B_1] + [B_1]^t B [B_2] + [B_2]^t B [B_1] + [B_2]^t D [B_2] + [B_3]^t S [B_3] \quad (24)$$

Là ma trận độ cứng phần tử. Véc tơ lực nút phần tử được tính theo công thức sau:

$$\{f_e\} = \int_{A_e} [N]^t \{q_0\} - \iint ([B_1]^t N^{ND} + [B_2]^t M^{ND}) dA \quad (25)$$

Hệ phương trình cân bằng nhận được khi cực tiểu hóa thế năng toàn phần của phần tử có dạng:

$$[K_e] \{q_e\} = \{f_e\} \quad (26)$$

Bằng phép ghép nối các ma trận độ cứng phần tử thông thường, ta nhận được phương trình PTHH cho toàn tấm:

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (27)$$

với $[K]$, $\{q\}$, $\{F\}$ lần lượt là ma trận độ cứng tổng thể, véc tơ chuyển vị nút tổng thể và véc tơ lực nút tổng thể.

3. Kết quả số

Bài toán 1: Kiểm chứng thuật toán và chương trình

Để kiểm chứng độ tin cậy của thuật toán và chương trình đã xây dựng, bài báo so sánh kết quả tính toán với kết quả tính theo lý thuyết bậc nhất đơn giản (FSDT) của Huu-Tai Thai, Dong-Ho Choi [14]. Cụ thể là khảo sát độ võng không thứ nguyên lớn nhất tại tâm của tấm vuông có tỷ lệ chiều dài/ chiều dày là $\frac{a}{h} = 10$. Công

thức tính độ võng không thứ nguyên là: $w = \frac{10h^3 E_c}{q_0 b^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Bảng 1. So sánh độ võng \bar{w}

p	Tác giả	\bar{w}_{max}	$\bar{\sigma}_{xx} \left(\frac{h}{2} \right)$
0 (ceramic)	Bài báo	0.4666	2.8837
	Thai-Choi[24]	0.4666	2.8732
	Độ lệch	0%	0.36%
1	Bài báo	0.9288	4.4569
	Thai-Choi[24]	0.9288	4.4070
	Độ lệch	0.00%	1.12%
2	Bài báo	1.1909	5.2042
	Thai-Choi[24]	1.1909	5.1852
	Độ lệch	0.00%	0.37%

Nhận xét: Từ bảng 1 nhận thấy chênh lệch giữa kết quả của tác giả và của Huu-Tai Thai, Dong-Ho Choi là rất nhỏ, điều đó chứng tỏ thuật toán và chương trình có độ tin cậy.

Bài toán 2: Ảnh hưởng của nhiệt độ tới độ võng của tấm FGM

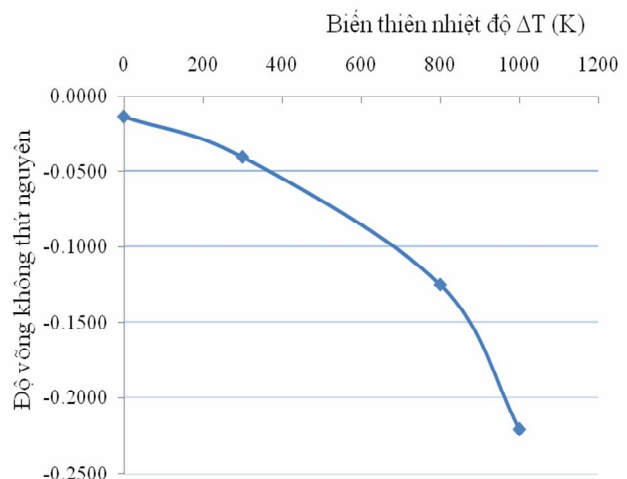
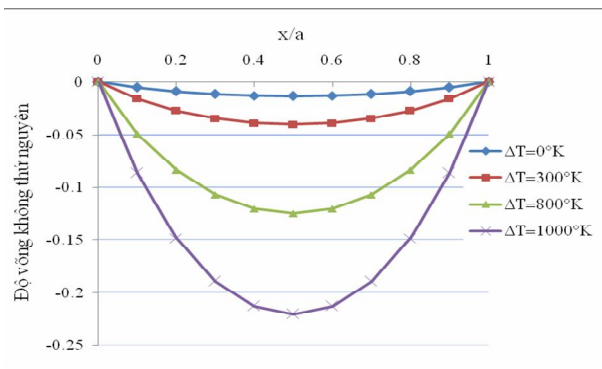
Xét tấm hình vuông bốn biên tựa khớp làm bằng vật liệu P-FGM. Mặt trên là nhôm ô xit - ceramic

(Al_2O_3) có $E_c=380$ (GPa). Mặt dưới là nhôm - kim loại (Al) có $E_m=70$ (GPa). Kích thước tấm $h=10cm$, $b=100cm$. Tải trọng phân bố đều trên mặt tấm $q=1$ Mpa. Nhiệt độ ban đầu $T_0=300^\circ K$ và biến thiên nhiệt độ $\Delta T=300^\circ K$, $\Delta T=500^\circ K$, $\Delta T=800^\circ K$, $\Delta T=1000^\circ K$.

Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ tới độ võng lớn nhất trong tấm FGM (chỉ số tỷ lệ thể tích $p=1$), kết quả được thể hiện trong bảng 2 và biểu diễn bằng đồ thị (hình 3).

Bảng 2. Độ võng không thứ nguyên w tại mặt cắt $y=b/2$ dưới tác dụng của tải phân bố đều và nhiệt độ

x/a	$\Delta T=300^\circ K$	$\Delta T=500^\circ K$	$\Delta T=800^\circ K$	$\Delta T=1000^\circ K$
0	0	0	0	0
0.1	-0.0053	-0.0158	-0.0491	-0.0868
0.2	-0.0091	-0.0271	-0.0840	-0.1485
0.3	-0.0116	-0.0346	-0.1071	-0.1895
0.4	-0.0130	-0.0388	-0.1203	-0.2127
0.5	-0.0135	-0.0402	-0.1245	-0.2203
0.6	-0.0130	-0.0388	-0.1203	-0.2127
0.7	-0.0116	-0.0346	-0.1071	-0.1895
0.8	-0.0091	-0.0271	-0.0840	-0.1485
0.9	-0.0053	-0.0158	-0.0491	-0.0868
1	0	0	0	0



Hình 3. Biểu đồ độ võng không thứ nguyên w tại mặt cắt $y=b/2$ ở các mức nhiệt độ khác nhau

Nhận xét:

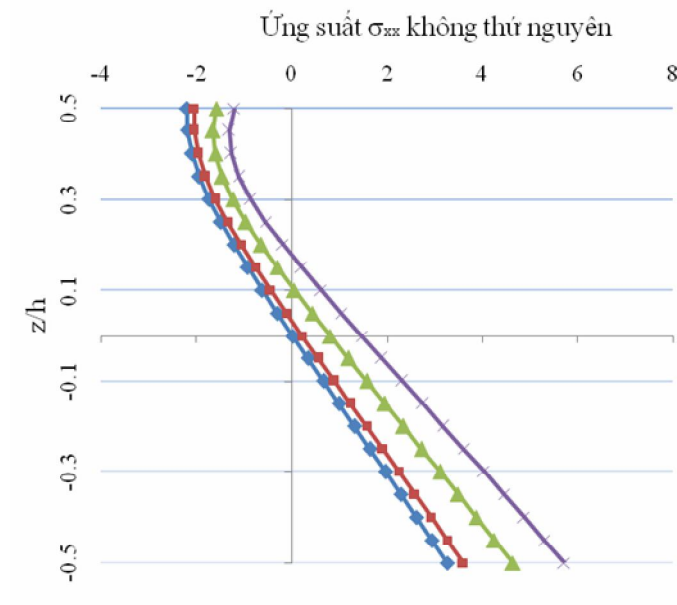
Từ kết quả trong bảng 2 và hình 3 ta nhận thấy khi tấm chịu tải trọng nhiệt độ thì độ võng lớn nhất vẫn ở vị trí giữa tấm. Khi nhiệt độ tuyệt tối thấp thì độ võng tăng nhỏ ngay cả khi chênh lệch nhiệt độ là lớn nhưng khi nhiệt độ tuyệt đối cao thì độ võng tăng nhanh hơn nhiều mặc dù chênh lệch nhiệt độ là thấp.

Bài toán 3: Ảnh hưởng của nhiệt độ đến ứng suất trong tấm FGM

Kết cấu, vật liệu và các điều kiện khác như trong bài toán 2. Khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ T ứng suất không thứ nguyên σ_{xx} (chỉ số tỷ lệ thể tích $\rho=5$), kết quả được tính toán và thể hiện trong bảng 3 và biểu diễn bằng đồ thị như hình 4.

Bảng 3. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến ứng suất không thứ nguyên tại tâm của tấm

z/h	$\Delta T=300^\circ K$	$\Delta T=500^\circ K$	$\Delta T=800^\circ K$	$\Delta T=1000^\circ K$
-0.5	3.2616	3.6020	4.6331	5.7229
-0.4	2.6126	2.9259	3.8709	4.8768
-0.3	1.9635	2.2497	3.1083	4.0300
-0.2	1.3137	1.5726	2.3439	3.1802
-0.1	0.6636	0.8947	1.5768	2.3250
0	0.0166	0.2195	0.8101	1.4662
0.1	-0.6164	-0.4416	0.0579	0.6181
0.2	-1.2122	-1.0629	-0.6464	-0.1811
0.3	-1.7276	-1.5966	-1.2378	-0.8540
0.4	-2.0915	-1.9633	-1.6059	-1.2663
0.5	-2.1946	-2.0403	-1.5780	-1.2044



Hình 4. Ảnh hưởng của nhiệt độ lên ứng suất

Nhận xét:

Từ bảng kết quả và đồ thị biểu diễn ta có thể thấy ứng suất tại mặt trên của tấm chịu ảnh hưởng của nhiệt độ ít hơn so với mặt dưới, điều đó cho thấy sự khác biệt giữa hai loại vật liệu ở hai mặt trên và dưới của tấm. Đây chính là đặc trưng cơ bản của vật liệu

FGM khi mỗi vật liệu thành phần là tuyến tính nhưng vật liệu tạo thành lại là phi tuyến.

3. Kết luận

Mô hình phần tử hữu hạn sử dụng phần tử đẳng tham số 9 nút, mỗi nút 5 bậc tự do dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner-Mindlin đã được thiết

lập để tính toán độ võng và ứng suất cho kết cấu tấm được làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên FGM khi chịu tải trọng cơ học và nhiệt độ. Từ các kết quả số có thể rút ra các kết luận sau:

- Nhiệt độ ảnh hưởng đến ứng suất trong kết cấu tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên tại các vị trí khác nhau dọc theo chiều dày của tấm là khác nhau và thể hiện rõ nhất là tại mặt trên và mặt dưới của tấm. Dọc theo chiều dày của tấm thì ứng suất biến thiên phi tuyến;

- Độ võng của kết cấu tấm FGM tăng chậm trong môi trường có nhiệt độ thấp và tăng nhanh khi đặt trong môi trường nhiệt độ cao.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. WANG Y. M. and TARN J. Q. A three-dimensional analyses of anisotropic inhomogeneous and laminated plate. *Int J Solids Struct* 1994, 31:497–515.
2. WANG Y.M, and TARN J. Q. Asymptotic thermoelastic analyses of anisotropic inhomogeneous and laminated plate. *J Therm Stress* 1995, 18:35–58.
3. ABOUDI J., PINDER M. J. and ARNOLD S.M. Thermoelastic theory for the response of materials functionally graded in two directions with applications to the free edge problem. *Int J Solids Struct* 1996 33:931–66.
4. PRAVEEN G. N. and REDDY J.N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *Int J Solids Struct* 1998, 35:4457–4476.
5. REDDY JN, CHIN CD. Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Int J Solids Struct* 1998;21:593–626.
6. CHENG ZQ, BATRA RC. Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate. *Compos Part B: Eng* 2000;13:97–106. 82
7. DAO HUY BICH, VU DO LONG, “Non-linear dynamical analysis of imperfect functionally graded material shallow shells”, *Vietnam Journal of Mechanics VAST* 32(1), pp. 65-79, 2010.
8. TRẦN ÍCH THỊNH, Vật liệu Compozit – Cơ học và tính toán kết cấu, *Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1994.*
9. NGUYỄN THỊ BÍCH PHƯỢNG, TRẦN MINH TÚ. Tính toán tấm chịu uốn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, Đại học Xây dựng, số 13/2012.*
10. HUỖNH VINH. Phân tích tấm chịu uốn làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng, Đại học Xây dựng, 10/2013.*
11. TRẦN THỊ NHẬT NGUYỄN. Nghiên cứu tần số dao động riêng của tấm làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên. *Luận văn Thạc sỹ Kỹ thuật, Đại học Đà Nẵng, 2013.*
12. YANG J., SHEN H. S. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environment. *Soud and Vibration (2002) 255(3), 579-602.*
13. REDDY JN, CHIN CD. Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Int J Solids Struct* 1998;21:593–626.
14. HUU-TAI THAI, DONG-HO CHOI. A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures Vol 101, 2013, Pages 332–340.*

Ngày nhận bài sửa: 10/9/2014.