

PHÂN TÍCH DẪO TẮM MỎNG KIRCHHOFF BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP CÓ XÉT ĐẾN TÍNH NGẪU NHIÊN CỦA GIỚI HẠN CHẢY CỦA VẬT LIỆU

PLASTIC ANALYSIS OF KIRCHHOFF PLATE UNDER RANDOM CONDITION OF STRENGTH BY DIRECT METHOD

ThS. **NGÔ QUANG HƯNG**

Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

Tóm tắt: Bài báo đề xuất việc tính toán giới hạn và thích nghi của tấm Kirchhoff dưới các điều kiện ngẫu nhiên của giới hạn chảy. Thiết kế theo độ tin cậy của kết cấu bằng kỹ thuật Chance constrained programming là rất hiệu quả nếu nó được xây dựng như một bài toán tối ưu tất định tương đương.

Abstract: A new formulation to calculate the shakedown limit load of Kirchhoff plates under stochastic conditions of strength is developed. Direct structural reliability design by chance constrained programming is based on the required failure probabilities, which is an effective approach of stochastic programming if it can be formulated as an equivalent deterministic optimization problem.

1. Mở đầu

Tấm là bộ phận kết cấu quan trọng, được sử dụng rộng rãi trong thực tế như tấm sàn trong xây dựng và các bộ phận trong cơ khí. Tính chất chịu uốn của một tấm phụ thuộc vào chiều dài của nó. Lý thuyết cổ điển chia tấm thành các nhóm: Tấm mỏng với biến dạng nhỏ, tấm mỏng với biến dạng lớn và tấm dày. Tấm mỏng với lý thuyết biến dạng nhỏ được gọi là tấm Kirchhoff, áp dụng với tấm có chiều dài nhíp lớn hơn ít nhất 10 lần chiều dày tấm.

Phân tích trạng thái giới hạn của tấm chịu uốn được nghiên cứu bằng lời giải giải tích và lời giải số trong nhiều công trình chẳng hạn như [1-13]. Do giới hạn của các phương pháp giải tích, các hướng tiếp cận số như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp không lưới (Meshfree method), phương pháp phần tử đẳng hình học (IGA) đã được đề xuất [1-6,14].

Lý thuyết phân tích trạng thái giới hạn phát biểu các bài toán dưới dạng các bài toán tối ưu hóa toán học. Nếu giới hạn chảy của tấm là biến ngẫu nhiên, chúng ta phải xem các bài toán này như là bài toán

tối ưu hóa với các biến ngẫu nhiên (Stochastic programming). Có rất nhiều mô hình để giải lớp bài toán này, độc giả có thể tìm thấy trong các công trình [15-23] mà Chance constrained programming (CCOPT) là một mô hình hiệu quả trong số đó.

CCOPT được Sikorski và Borkowski [29] đầu tiên đề xuất dùng để giải bài toán tính lực giới hạn của kết cấu khi kể đến tính ngẫu nhiên của tải trọng và giới hạn chảy của vật liệu. Tuy vậy các nghiên cứu này giới hạn ở một số bài toán kết cấu đơn giản như dầm, khung, dàn và sử dụng bài toán tối ưu tuyến tính để giải. Trần và Staat [28] đã xây dựng và giải bài toán phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu dưới các điều kiện ngẫu nhiên của độ cứng và tải trọng cho các bài toán lớn 2D,3D sử dụng mô hình CCOPT.

Bài báo này xuất phát từ các nghiên cứu của Sikorski [29] và Tran [1,28], phát triển để giải bài toán phân tích trạng thái giới hạn tấm Kirchhoff dưới điều kiện ngẫu nhiên của giới hạn chảy (có kể đến yếu tố ngẫu nhiên của mô men dẻo của tấm). Phạm vi khảo sát là tấm Kirchhoff chịu uốn với tải trọng tác dụng vuông góc với mặt tấm, sử dụng vật liệu thép được coi là đồng nhất, đẳng hướng, làm việc theo mô hình đàn hồi dẻo.

Bài báo sử dụng phương pháp trực tiếp phân tích giới hạn và thích ứng (Limit and shakedown analysis). Đây là một nhánh của cơ học tính toán, đóng vai trò quan trọng trong thiết kế xây dựng và cơ khí. Nội dung của phương pháp trực tiếp hướng đến việc xác định khả năng chịu lực của các kết cấu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi. Lý thuyết phân tích trạng thái giới hạn cho phép xác định cường độ lực lớn nhất mà kết cấu có thể chịu được khi kết cấu chịu quá trình chất tải được coi là chất tải đơn giản (Limit analysis) và chất tải phức tạp (Shakedown analysis). Phương pháp trực tiếp rất hiệu quả bởi nó chỉ khảo sát trạng thái cực hạn, trạng thái phá hủy mà

không quan tâm đến quá trình chi tiết xảy ra trong kết cấu.

2. Phương pháp cận trên đối với bài toán phân tích giới hạn và thích ứng của tấm chịu uốn

Các phương pháp phân tích trạng thái giới hạn dựa trên các định lý phá hủy dẻo của kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi dẻo hoặc vật liệu cứng dẻo. Chúng ta có hai cách tiếp cận đối với bài toán phân tích trạng thái giới hạn, phương pháp tĩnh (phương pháp cận dưới) và phương pháp động (phương pháp cận trên). Phương pháp cận dưới dẫn đến việc giải một bài toán tối ưu hóa nhằm cực đại của hàm mục tiêu trong khi phương pháp cận trên dẫn đến việc giải một bài toán tối ưu hóa nhằm cực tiểu của hàm mục tiêu. Nhiều công trình nghiên cứu đã sử dụng hai hướng tiếp cận trên đối với bài toán phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu, chẳng hạn Simon và Weichert sử dụng phương pháp cận dưới và thuật toán điểm trong để phân tích thích ứng của kết cấu 2D, 3D [25-26]. Trần et al [27] dùng phương pháp cận trên phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu vỏ với tiêu chuẩn chảy dẻo Liyushin.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sử dụng định lý Koiter để xây dựng bài toán theo phương pháp cận trên. Công trình sử dụng tiêu chuẩn chảy dẻo von Mises. Năng lượng tiêu tán trên một đơn vị diện tích tấm có thể thiết lập như một hàm của vận tốc biến dạng:

$$\dot{D}_p = \sigma_0 \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (1)$$

$$\text{Ở đây: } \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Năng lượng tiêu tán dẻo của miền tấm Ω có thể biểu diễn như sau:

$$\dot{D}_{\text{int}}(\dot{\boldsymbol{\chi}}) = \int_{\Omega-h/2}^{h/2} \int \dot{D}_p \, dz d\Omega = m_0 \int_{\Omega} \sqrt{\dot{\boldsymbol{\chi}}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\chi}}} \, d\Omega \quad (3)$$

trong đó: m_0 - mô men giới hạn chảy trên một đơn vị chiều dài của mặt cắt tấm.

Chúng tôi giới thiệu ở đây một trường độ cong dẻo khả dĩ, nó phải thỏa mãn biểu thức sau:

$$\Delta \boldsymbol{\chi}^p = \sum_{k=1}^m \dot{\boldsymbol{\chi}}^p = \nabla^2 \dot{w} \quad (4)$$

Dựa trên định lý Koiter và lý thuyết toán tối ưu, chúng ta có thể tìm được một cận trên của hệ số tải

trọng shakedown [1,25,28] bằng cách giải bài toán tối ưu hóa toán học:

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \int_A \dot{D}_{\text{int}}(\dot{\boldsymbol{\chi}}) \, d\Omega$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \Delta \boldsymbol{\chi}^p = \sum_{k=1}^m \dot{\boldsymbol{\chi}}^p = \nabla^2 \dot{w} & \text{in } \Omega \\ \dot{w} = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \mathbf{m}^E(x, \hat{P}_k) \dot{\boldsymbol{\chi}}^T \, d\Omega = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Chúng ta ký hiệu vector biến nút của phần tử hữu hạn $\mathbf{u} = [w \ \partial w / \partial x \ \partial w / \partial y]^T$, bài toán (5) được rời rạc hóa bằng phần tử hữu hạn như sau:

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i m_0 \sqrt{\dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}}$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \sum_{k=1}^m \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik} = \mathbf{B}_i \mathbf{u} & \forall i = \overline{1, NG} \\ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}^T \mathbf{m}_{ik}^E = 1 \end{cases} \quad (6)$$

3. Phương pháp cận trên đối với bài toán phân tích giới hạn và thích ứng của tấm chịu uốn khi giới hạn chảy của vật liệu được coi là đại lượng ngẫu nhiên

Nếu giới hạn chảy của vật liệu là ngẫu nhiên, thì mô men dẻo là đại lượng không chắc chắn và hàm mục tiêu của bài toán (6) là biến ngẫu nhiên. Ta có thể xây dựng bài toán như sau:

$$\min \eta$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \text{Prob} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i m_0(\omega) \sqrt{\dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}} \geq \eta \right) = \psi \\ \sum_{k=1}^m \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik} = \mathbf{B}_i \mathbf{u} & \forall i = \overline{1, NG} \\ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}^T \mathbf{m}_{ik}^E = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Khi mô men dẻo $m_0(\omega)$ là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật phân bố chuẩn với μ là giá trị trung bình và σ là độ lệch chuẩn thì bằng kỹ thuật của CCOPT bài toán (7) có thể chuyển thành bài toán tương đương sau một số phép biến đổi:

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i (\mu_i - \kappa \sigma_i) \sqrt{\dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}^T \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}}$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \sum_{k=1}^m \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik} = \mathbf{B}_i \mathbf{u} & \forall i = \overline{1, NG} \\ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i \dot{\boldsymbol{\chi}}_{ik}^T \mathbf{m}_{ik}^E = 1 \end{cases} \quad (8)$$

4. Thuật toán cận trên cho bài toán phân tích shakedown tấm Kirchhoff

Chúng ta đưa vào một vài ký hiệu mới để tiện tính toán:

$$\dot{\mathbf{k}}_{ik} = w_i \mathbf{Q}^{1/2} \dot{\chi}_{ik}, \quad \mathbf{t}_{ik} = (\mathbf{Q}^{-1/2})^T \mathbf{m}_{ik}^E, \quad \hat{\mathbf{B}}_i = w_i \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{B}_i, \quad (9)$$

$$\text{Ở đây: } \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{Q}^{-1/2} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{1/2})^T \mathbf{Q}^{1/2}. \quad (10)$$

Thay thế (9) vào (8) chúng ta thu được một bài toán gọn gàng hơn cho cận trên của lực limit shakedown:

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} (\mu_i - \kappa \sigma_i) \sqrt{\dot{\mathbf{k}}_{ik}^T \dot{\mathbf{k}}_{ik}}$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \forall i = \overline{1, NG} & (a) \\ \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 = 0 & & (b) \end{cases} \quad (11)$$

Sử dụng phương pháp Penalty để xử lý ràng buộc đầu tiên trong (11) chúng ta dẫn đến hàm Penalty như sau:

$$F_p = \sum_{i=1}^{NG} \left\{ \sum_{k=1}^m e^{(\mu_i - \kappa \sigma_i)} \sqrt{\dot{\mathbf{k}}_{ik}^T \dot{\mathbf{k}}_{ik}} + \frac{c}{2} \left(\sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{u}} \right)^T \left(\sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{u}} \right) \right\}, \quad (12)$$

trong đó: c - một thông số phạt (penalty parameter, rất lớn) $c \gg 1$.

Sử dụng phương pháp thừa số Lagrange để đưa bài toán (11) thành bài toán không ràng buộc:

$$L = F_p - \alpha \left(\sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 \right). \quad (13)$$

Điều kiện tối ưu Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions (KKT optimality conditions) đưa ra điều kiện cho lời giải cực tiểu địa phương của bài toán (13).

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{k}}_{ik}} = \left(\bar{Y}_i \frac{\dot{\mathbf{k}}_{ik}}{\sqrt{\dot{\mathbf{k}}_{ik}^T \dot{\mathbf{k}}_{ik} + \varepsilon^2}} \right) + c \mathbf{D}_M \dot{\mathbf{e}}_{ik} + c \left(\sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik} - \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{u}} \right) + \alpha \mathbf{t}_{ik} = 0 & (a) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = -c \mathbf{B}_i^T \left(\sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_{ik} - \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{u}} \right) = 0 & (b) \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{Ne} \sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{e}}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 = 0 & (c) \end{cases} \quad (14)$$

Sử dụng phương pháp Newton để giải hệ phương trình phi tuyến (14) ta thu được các vectors $d\dot{\mathbf{u}}, d\dot{\mathbf{k}}_{ik}$ và $d\alpha$ thực sự là các hướng Newton mà khi đi theo hướng này với các bước phù hợp sẽ dẫn đến việc giảm hàm mục tiêu của (13).

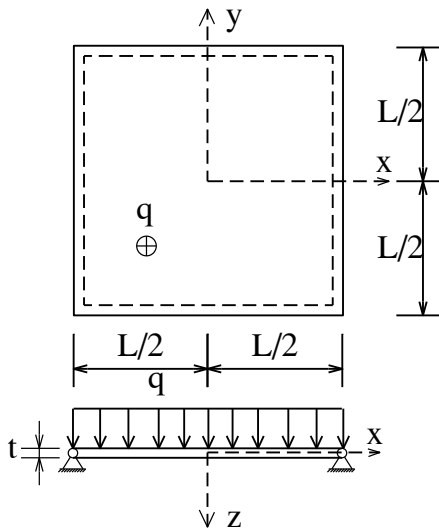
$t = 0,01m$. Vật liệu tấm là thép, được coi là đồng nhất, đẳng hướng. Giới hạn chảy vật liệu làm tấm là đại lượng ngẫu nhiên với giá trị trung bình $E(\sigma_0) = 250 \text{ MPa}$ và độ lệch chuẩn $\sigma = 0,1E(\sigma_0)$. Giả sử độ tin cậy được chọn $\psi = 0,9999$, hãy tính hệ số tải trọng giới hạn.

5. Các ví dụ số

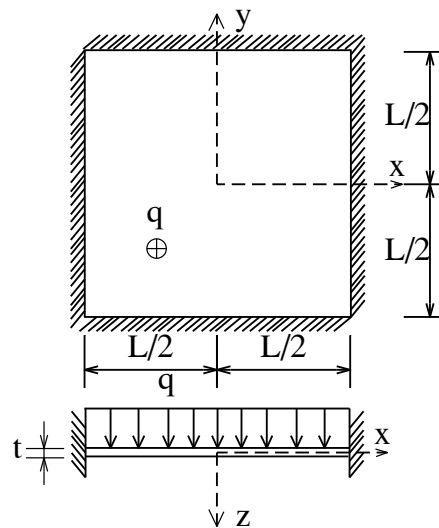
Chúng ta khảo sát một tấm hình vuông chịu tải phân bố đều q , chiều dài $L = 1,0m$, chiều dày tấm

Xét 2 bài toán với các điều kiện liên kết biên.

1. Tấm có 4 cạnh liên kết khớp.
2. Tấm có 4 cạnh liên kết ngàm.



Hình 1. Tấm 4 cạnh có liên kết khớp chịu tải trọng phân bố đều q



Hình 2. Tấm 4 cạnh có liên kết ngàm chịu tải trọng phân bố đều q

Do tính đối xứng, ta rời rạc hóa một phần tư tấm 256 phần tử DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral). Bảng 1-2 trình bày kết quả số của lời giải cùng so sánh với các công trình của tác giả khác. Các kết quả đã được chuẩn hóa với m_0 / L^2 . Lời giải chính xác với trường hợp cách cạnh bị ngàm đã được Fox đưa ra trong tài liệu [9] là $42,851 \frac{m_0}{qL^2}$. So sánh với lời giải giải tích và lời giải số của các tác giả khác, kết quả thu được trong bài báo này không

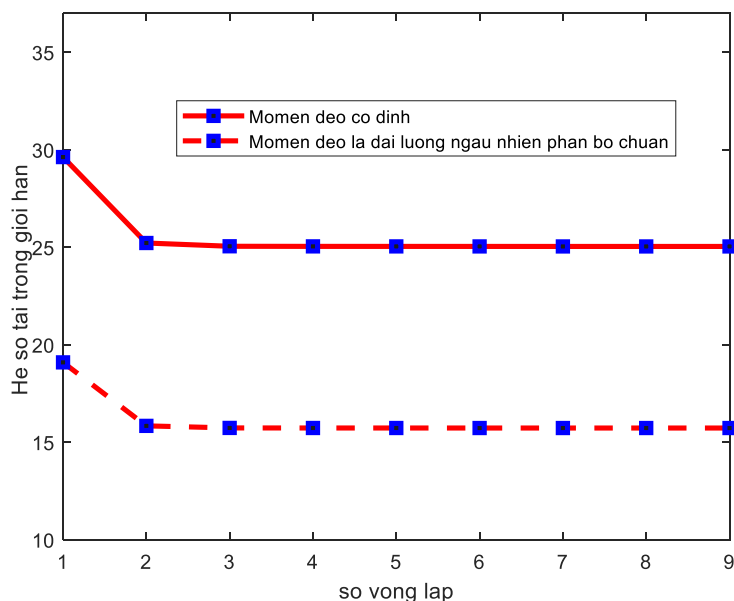
chênh lệch nhiều đối với trường hợp mô men dẻo của tấm là đại lượng bất định. Điều này thể hiện sự đúng đắn của thuật toán. Từ bảng 1 và 2 chúng ta cũng thấy rằng khi coi mô men dẻo của tấm là đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn thì hệ số tải trọng giới hạn giảm đáng kể. Với độ tin cậy 99,99% và tỷ số độ lệch chuẩn với giá trị trung bình 10% thì hệ số tải trọng giảm từ 25,74 xuống 15,82 (cho tấm liên kết tựa đơn). Với tấm chịu liên kết ngàm, kết quả tính toán cho trường hợp mô men dẻo cố định và ngẫu nhiên tương ứng là 45,76 và 28,66.

Bảng 1. Hệ số tải trọng giới hạn trong trường hợp tấm 4 cạnh có liên kết tựa đơn giản

Tên các tác giả	Phương pháp cận dưới	Phương pháp cận trên	
Hodge <i>et al.</i> [6]	24,86	26,54	Mô men dẻo bất định
Capsoni <i>et al.</i> [8]		25,02	
Le <i>et al.</i> [5]		25,01	
Tran <i>et al.</i> [14]	25,04	25,04	
Kết quả của bài báo		25,74	Phân bố chuẩn
		15,82	

Bảng 2. Hệ số tải trọng giới hạn trong trường hợp tấm 4 cạnh có liên kết ngàm

Tên các tác giả	Phương pháp cận dưới	Phương pháp cận trên	
Fox [9]	42,851	42,851	Mô men dẻo bất định
Morley [7]		42,88	
Hodge <i>et al.</i> [6]	42,86	49,25	
À Capsoni <i>et al.</i> [8]		45,29	
Le <i>et al.</i> [5]		45,29	
Tran <i>et al.</i> [14]	45,06	45,06	
Kết quả của bài báo		45,76	Phân bố chuẩn
		28,66	



Hình 3. Sự hội tụ của hệ số tải trọng giới hạn

Kết luận: Bài báo đề xuất việc sử dụng phương pháp cận trên kết hợp với mô hình CCOPT để xây dựng và giải thành công bài toán tính giá trị tải trọng giới hạn tấm mỏng Kirchhoff chịu uốn kể điều kiện ngẫu nhiên của giới hạn chảy (yếu tố ngẫu nhiên của mô men dẻo của tấm), coi mô men dẻo là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo quy luật phân bố chuẩn.

Thuật toán trong công trình này có thể dùng để tính hệ số tải trọng cho phân tích giới hạn và thích ứng trong 2 trường hợp: Mô men dẻo của tấm là tất định và mô men dẻo của tấm là hàm phân bố chuẩn.

CCOPT là một mô hình hiệu quả khi chúng ta đưa bài toán tối ưu biến ngẫu nhiên thành bài toán tương đương với các biến cố định và sau đó giải với các thuật toán thường dùng của bài toán tối ưu hóa toán học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- N.T. Trần, T.N. Trần, H.G. Matthies, G.E. Stavroulakis, M. Staat (2016), Shakedown analysis of plate bending analysis under stochastic uncertainty by chance constrained programming. *M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, G. Stefanou, V. Plevris eds. ECCOMAS Congress 2016, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. Crete Island, Greece, 5–10 June 2016, Vol. 2, pp. 3007-3019.*
- T.N. Trần, M. Staat (2014), Shakedown analysis of Reissner-Mindlin plates using the edge-based smoothed finite element method. K. Spiliopoulos, D. Weichert eds. *Limit states of materials and structures: Direct methods. Springer, Dordrecht, 101-117.*
- T.N. Trần, R. Kreißig, M. Staat (2009), Probabilistic limit and shakedown analysis of thin plates and shells. *Structural Safety, 31(1), 1-18.*
- C.V. Le, H. Nguyen-Xuan, H. Nguyen-Dang (2010), Upper and lower bound limit analysis of plates using FEM and second-order cone programming. *Comput. Struct., 88(1-2), 65-73.*
- C.V. Le, M. Gilbert, H. Askes (2009), Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming. *Int. J. Numer. Meth. Engng, 78, 1532-1552.*
- T. Belytschko, P.G. Hodge (1968), Numerical methods for the limit analysis of plates. *Trans. ASME, J. Appl. Mech., 35, 796-801.*
- C.T. Morley (1965), The ultimate bending strength of reinforced concrete slabs. *PhD thesis, Cambridge University.*
- L. Capsoni, A. Corradi (1999), Limit analysis of plates-a finite element formulation. *Struct. Eng. Mech., 8(4), 325-341.*
- E.N. Fox (1974), Limit analysis for plates: the exact solution for a clamped square plate of isotropic homogeneous material obeying the square yield criterion and loaded by uniform pressure. *Math. Phys. Eng. Sci., 277(1265), 121-155.*
- R.H. Wood (1969), A partial failure of limit analysis for slabs, and the consequences for future research. *Mag.Concr. Res., 21, 79-90.*

11. W.C. McCarthy, L.A. Traina (1987), A plate bending finite element model with a limit analysis capacity. *Math. Model.*, 8(Supplement C), 486-492.
12. K. Krabbenhoft, L. Damkilde (2002), Lower bound limit analysis of slabs with nonlinear yield criteria. *Comput. Struct.*, 80(27-30), 2043-2057.
13. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger (1959), Theory of plates and shells. 2nd Edition. McGraw Hill.
14. T.N. Tran (2011), A dual algorithm for shakedown analysis of plate bending. *Numer. Methods Eng.*, 86(7), 862-875.
15. J. Björnberg and M. Diehl (2006), "Approximate robust dynamic programming and robustly stable MPC," *Automatica*, vol. 42, no. 5, pp. 777-782.
16. L. Zéphyr, P. Lang, B. F. Lamond, and P. Côté (2017), "Approximate stochastic dynamic programming for hydroelectric production planning," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 262, no. 2, pp. 586-601.
17. K. Fukushima and Y. Waki (2013), "A polyhedral approximation approach to concave numerical dynamic programming," *J. Econ. Dyn. Control*, vol. 37, no. 11, pp. 2322-2335.
18. B. Srinivasan, S. Palanki, and D. Bonvin (2003), "Dynamic optimization of batch processes: I. Characterization of the nominal solution," *Comput. Chem. Eng.*, vol. 27, no. 1, pp. 1-26.
19. S. Rasoulilian and L. A. Ricardez-Sandoval, "Worst-case and Distributional Robustness Analysis of a Thin Film Deposition Process," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 8, pp.
20. M. Riis and K.A. Andersen (2005), "Applying the minimax criterion in stochastic recourse programs," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 165, no. 3, pp. 569-584.
21. H. Borsenberger, G. Sandou, and P. Dessante (2010), "Unit Commitment with Production Cost Uncertainty, a Recourse Programming Method," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 43, no. 1, pp. 220-225.
22. A. Prepoka (1995), Stochastic Programming. Springer Netherlands.
23. A. Charnes, W. Cooper, G.H. Symonds (1958), "Cost horzons and certainty equivalence: An approach in stochastic programming of heating oil," *Manage. Sci.*, vol. 4, pp. 235-263.
24. A. Charnes and W.W. Cooper (1959), "Chance-Constrained Programming," *Manage. Sci.*, vol. 6, no. 1, pp. 73-79.
25. J.W. Simon and D. Weichert (2012), "Shakedown analysis with multidimensional loading spaces," *Comput. Mech.*, vol. 49, no. 4, pp. 477-485.
26. J.W. Simon and D. Weichert (2012), "Shakedown analysis of engineering structures with limited kinematical hardening," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 49, pp. 2177-2186.
27. T.N. Tran, R. Kreißig, D.K. Vu, and M. Staat (2008), "Upper bound limit and shakedown analysis of shells using the exact Ilyushin yield surface," *Comput. Struct.*, vol. 86, no. 17-18, pp. 1683-1695.
28. Tran Ngoc Trinh, Staat, M.(2021): Direct plastic structural design under random strength and random load by chance constrained programming. *Eur J Mech A Solids*; 85(1): art. no. 104106.
29. K.A. Sikorski and A. Borkowski (1990), "Ultimate load analysis by stochastic programming," in *Mathematical Programming Methods in Strutral Plasticity*, D.L. Smith, Ed., Springer, Wien, New York, pp.403-424.

Ngày nhận bài: 06/5/2021.

Ngày nhận bài sửa: 03/6/2021.

Ngày chấp nhận đăng: 03/6/2021.