

ỨNG XỬ ĐỘNG CỦA DẦM SANDWICH LỖI TỪ VẬT LIỆU CƠ TÍNH BIẾN THIÊN HAI CHIỀU CHỊU LỰC DI ĐỘNG

TS. LÊ THỊ HÀ

Đại học Giao thông vận tải

Tóm tắt: Bài báo phân tích dao động của dầm sandwich lõi làm từ vật liệu cơ tính biến thiên hai chiều (2D-FGM) chịu lực di động. Mặt đáy của dầm hoàn toàn bằng kim loại, mặt trên làm bằng gốm. Sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao, sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp phương pháp Newmark để tính đáp ứng động cho dầm. Ngoài ra, bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của tham số vật liệu, tốc độ lực di động đến dao động của dầm. Kết quả số trong bài báo sẽ minh họa ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tỉ số hình học đến đáp ứng tần số và tham số động cho dầm.

Abstract: This paper analysis vibration of sandwich beams with bi-directional functionally graded core excited by a moving concentrated load. The lower face is made of isotropic metal, whereas the upper face is isotropic ceramic. Using the third-order shear deformation theory, a finite element formulation is derived and used in combination with the Newmark method in computing the vibration response. A parametric study is carried out to highlight the effect of the material distribution and moving load speed on the vibration characteristics of the beams. The numerical results show that the two grading indexes which govern the variation of the effective material properties have opposite effect on the natural frequencies, dynamic magnification factor. The influence of the aspect ratio on the dynamic behavior of the beams is also examined and discussed.

1. Giới thiệu

Kết cấu dầm được làm từ vật liệu FGM với khả năng kháng nhiệt tốt đang ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp hiện đại. Các bài toán tĩnh học và động học về kết cấu dầm FGM đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu nhưng chủ yếu là xét đến kết cấu với các tính chất vật liệu biến đổi theo một hướng không gian. Trong thực tế, kết cấu dầm như vậy sẽ không thể chống lại được các tác dụng cơ và

hiệt theo nhiều hướng, vì thế việc nghiên cứu kết cấu dầm với các tính chất vật liệu biến đổi theo hai hoặc ba hướng không gian là rất quan trọng. Đối với dầm sandwich cho vật liệu FGM thay đổi theo một hướng không gian, một số nhà khoa học trong và ngoài nước đã quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn, trên cơ sở lý thuyết dầm bậc ba cổ điển, Võ Phương Thức và cộng sự [1] đã xây dựng phương trình chuyển động cho dầm sandwich FGM có lõi là vật liệu thuần nhất, lớp mặt trên và mặt dưới là FG hoàn hảo và sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính tần số dao động riêng và dạng mode dao động của dầm. Bằng lý thuyết dầm bậc ba cải tiến, Nguyễn và cộng sự [2] phân tích dao động và mất ổn định của dầm sandwich với các điều kiện biên khác nhau. Tác giả đã chỉ ra rằng, tần số dao động tự do chịu ảnh hưởng nhiều bởi sự thay đổi của chỉ số phân bố vật liệu và ảnh hưởng bởi sự thay đổi chiều cao của lõi dầm... Ngoài ra, Volkan and Muhittin [3] phân tích dao động tự do và mất ổn định của dầm sandwich bằng phương pháp phần tử hữu hạn nhiều bậc (multi-layer finite element). Với lý thuyết dầm bậc cao của Reddy, Lê Thị Hà và Trần Thị Trâm [4] tính toán đáp ứng động của dầm sandwich lớp mặt trên và mặt dưới là FGM biến thiên một chiều chịu lực di động. Bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của tham số vật liệu FGM có lõi rỗng biến thiên theo chiều dày dầm, ảnh hưởng của nhiệt độ, tỉ số giữa chiều cao lõi dầm và chiều cao dầm đến đáp ứng động lực học của dầm.

Theo như tác giả biết thì mới có một số ít tác giả nghiên cứu về kết cấu dầm FGM với tính chất vật liệu thay đổi theo hai hướng là chiều dài và chiều dày của dầm, gọi tắt là dầm 2D- FGM. Điển hình, Simsek [5] đã nghiên cứu sự mất ổn định của dầm 2D Timoshenko FGM, các tính chất vật liệu thay đổi theo cả chiều dày và chiều dài của dầm nhưng bằng quy luật mũ. Tải trọng mất ổn định tới hạn của dầm 2D- FG thu được bằng phương pháp Ritz. Tác giả đã chỉ ra rằng ứng xử mất ổn định của dầm 2D- FG chịu ảnh hưởng lớn bởi các tham số vật liệu. Dao

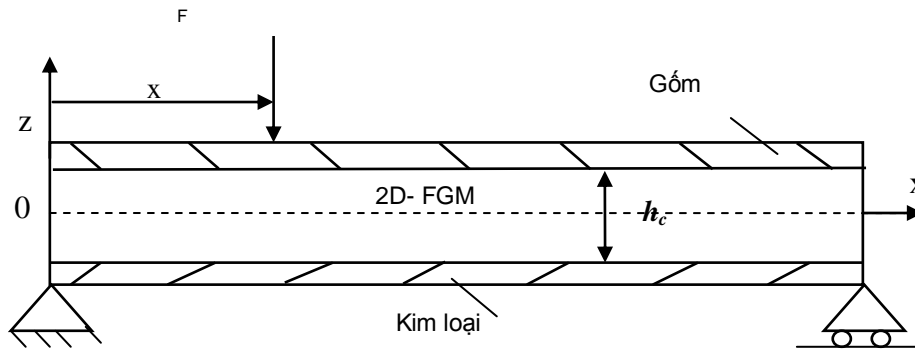
động tự do và cưỡng bức của dầm 2D Timoshenko FG dưới tác động của tải trọng di động cũng được nghiên cứu bởi Simsek [6], phương trình chuyển động được giải với sự trợ giúp của phương pháp tích phân Newmark- β ẩn, kết quả nhận được chỉ ra rằng các đáp ứng tự do và cưỡng bức cũng chịu ảnh hưởng bởi các tham số vật liệu. Gần đây, bằng phương pháp phần tử hữu hạn, Nguyễn và cộng sự [6] nghiên cứu dao động cưỡng bức của dầm Timoshenko 2D-FGM chịu tác dụng của lực di động. Trong đó, dầm được cấu tạo bởi bốn vật liệu thành phần, tác giả nghiên cứu ảnh hưởng của phân bố vật liệu, tốc độ lực di động đến dao động của dầm.

Trong bài báo này, tác giả phân tích đáp ứng động của dầm sandwich có lõi làm bằng vật liệu 2D-FGM chịu lực di động, lớp bề mặt trên làm từ vật liệu gốm và lớp dưới hoàn toàn là vật liệu thuần nhất kim loại. Sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao của Shi [7], bài báo nghiên cứu ảnh hưởng của

tham số phân bố vật liệu theo chiều dài và dày dầm, ảnh hưởng tốc độ của lực di động, ảnh hưởng của các tỉ số giữa chiều cao của lõi dầm và chiều cao của dầm đến dao động của dầm sẽ được khảo sát chi tiết trong bài báo.

2. Dầm sandwich chịu tác dụng của lực di động

Hình 1 minh họa dầm sandwich có lõi làm từ vật liệu 2D-FGM và lớp bề mặt trên và dưới dầm là vật liệu thuần nhất và dầm chịu tác dụng của lực di động với vận tốc không đổi. Giả thiết lực F là một đại lượng không đổi. Trên hình vẽ, trục Ox được chọn ở giữa dầm và trục Oz vuông góc với mặt phẳng giữa dầm. Trong bài báo này, giả thiết dầm có chiều dài L , chiều cao h , chiều cao lõi dầm h_c , lõi của dầm luôn luôn đối xứng qua trục giữa của dầm. Lực di chuyển trên dầm luôn bám dính với dầm trong suốt quá trình di chuyển từ đầu dầm đến cuối dầm và lực chuyển động với tốc độ không thay đổi trong suốt chiều dài dầm.



Hình 1. Dầm sandwich có lõi làm bằng vật liệu 2D-FGM chịu lực F di động

Thể tích vật liệu của dầm theo các lớp được giả thiết theo quy luật số mũ:

$$\begin{cases} V_c^3(x, z) = 1 & z \in \left[\frac{h_c}{2}; \frac{h}{2} \right] \\ V_c^2(x, z) = \left(1 - \frac{x}{l} \right)^m \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^n & z \in \left[\frac{-h_c}{2}; \frac{h_c}{2} \right] \\ V_c^1(x, z) = 0 & z \in \left[\frac{-h_c}{2}; \frac{-h_c}{2} \right] \end{cases} \quad (1)$$

trong đó: $V_c^k(x, z)$ - thể tích của vật liệu gốm trong các lớp của dầm ($k=1, 2, 3$), m, n lần lượt là chỉ số mũ của vật liệu khi phân bố theo chiều dài và chiều dày dầm, x - biến minh họa cho vật liệu thay đổi theo trục x và z - biến minh họa vật liệu thay đổi theo trục z

Tính chất hiệu dụng P (mô đun đàn hồi, mô đun trượt, mật độ khối, ...) cho dầm sandwich có lõi làm từ vật liệu 2D-FGM được viết như sau:

$$P^k(x, z) = (P_c - P_m)V_c^k(x, z) + P_m \quad (2)$$

trong đó: P_c, P_m - tính chất hiệu dụng của gôm và kim loại, P^k - tính chất hiệu dụng cho tầng thứ k của dầm.

Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc ba của Shi [8], chuyển vị dọc trục $u(x,z,t)$ và chuyển vị ngang $w(x, z, t)$ tại điểm nào đó, được cho như sau:

$$\begin{cases} u(x, z, t) = u_0 + z(\gamma_0 - w_{0,x}) - \alpha z^3 \gamma_0 \\ w(x, z, t) = w_0 \end{cases} \quad (3)$$

Từ đó, trường ứng suất tiếp τ_{xz} và ứng suất pháp σ_x được tính toán:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(x, z) \cdot \varepsilon_{xx} = E(x, z) [u_{0,x} + z(\gamma_{0,x} - w_{0,xx}) - \alpha z^3 \gamma_{0,x}] \\ \tau_{xz} &= G(x, z) \gamma_{xz} = \frac{E(x, z)}{2(1+\nu)} [\gamma_0 - 3\alpha z^2 \gamma_0] \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó: $E(x,z)$ và $G(x,z)$ tương ứng là mô đun đàn hồi và mô đun trượt phụ thuộc vào hai biến x, z , biểu thức cho hàm năng lượng biến dạng đàn hồi cho dầm sandwich lõi 2D- FGM được viết như sau:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[A_{11} u_{0,x}^2 + 2A_{12} u_{0,x} (\gamma_{0,x} - w_{0,xx}) + A_{22} (\gamma_{0,x} - w_{0,xx})^2 - 2A_{34} \alpha u_{0,x} \gamma_{0,x} - 2\alpha A_{44} \gamma_{0,x} (\gamma_{0,x} - w_{0,xx}) + \alpha^2 A_{66} \gamma_{0,x}^2 + B_{44} \gamma_0^2 \right] dx \quad (6)$$

trong đó, $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{34}, A_{44}, A_{66}$ và B_{44} là các độ cứng của dầm được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{34}, A_{44}, A_{66})(x, z) &= \int_A E^k(x, z) (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dA \\ B_{44}(x, z) &= \int_A G^k(x, z) (1 - 6\alpha z^2 + 9\alpha^2 z^4) dA \end{aligned} \quad (7)$$

Trong biểu thức (7), A là diện tích thiết diện ngang của dầm, $E^k(x,z)$, $G^k(x,z)$ tương ứng là mô đun đàn hồi và mô đun trượt tầng thứ k của dầm sandwich.

Từ trường chuyển vị (3), biểu thức động năng cho dầm sandwich có thể được xây dựng dưới đây:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_{11} (\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + I_{22} (\dot{\gamma}_0 - \dot{w}_{0,x})^2 + \alpha^2 I_{66} \dot{\gamma}_0^2 + 2I_{12} \dot{u}_0 (\dot{\gamma}_0 - \dot{w}_{0,x}) - 2\alpha I_{34} \dot{u}_0 \dot{\gamma}_0 - 2\alpha I_{44} \dot{\gamma}_0 (\dot{\gamma}_0 - \dot{w}_{0,x}) \right] dx \quad (8)$$

Trong biểu thức (8), $I_{11}, I_{12}, I_{22}, I_{34}, I_{44}, I_{66}$ là các mô-men khối lượng được định nghĩa như sau:

$$(I_{11}, I_{12}, I_{22}, I_{34}, I_{44}, I_{66})(x, z) = \int_A \rho^k(x, z) (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dA \quad (9)$$

trong đó: $\rho^k(x, z)$ - mật độ khối lớp thứ k của dầm sandwich có lõi là vật liệu 2D- FGM.

Thế năng của lực di động (V) được viết như sau:

$$V = -Fw(x) \delta(x - vt_i) \quad (10)$$

trong đó: $\delta(\cdot)$ - hàm Dirac delta và x - tọa độ được đo từ đầu trái đến đầu phải của dầm. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, ta chia dầm thành nhiều phần tử, mỗi phần tử chiều dài l và mỗi phần tử có 2 nút, mỗi nút có 4 bậc tự do. Từ đó các chuyển

trong đó: t - biến thời gian, $\alpha = \frac{4}{3h^2}$, $u_0(x, t)$ và $w_0(x, t)$ tương ứng là chuyển vị dọc trục và chuyển vị ngang của điểm bất kì nằm trên trục giữa của dầm, γ_0 - góc quay sinh ra do sự trượt của thiết diện ngang của dầm, z - khoảng cách từ điểm đến trục giữa dầm.

Biến dạng dọc trục ε_{xx} và biến dạng trượt γ_{xz} , tính được dựa trên trường chuyển vị (3).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{0,x} + z(\gamma_{0,x} - w_{0,xx}) - \alpha z^3 \gamma_{0,x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_0 - 3\alpha z^2 \gamma_0 \end{aligned} \quad (4)$$

hàm nội suy, biểu thức của năng lượng biến dạng đàn hồi được viết dưới dạng:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \tag{12}$$

và:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11} &= \int_0^l N_{u,x}^T A_{11} N_{u,x} dx; & \mathbf{k}_{12} &= 2 \int_0^l N_{u,x}^T A_{12} (N_{\gamma,x} - N_{w,xx}) dx; \\ \mathbf{k}_{22} &= \int_0^l (N_{\gamma,x} - N_{w,xx})^T A_{22} (N_{\gamma,x} - N_{w,xx}) dx; & \mathbf{k}_{34} &= -2\alpha \int_0^l N_{u,x}^T A_{34} N_{\gamma,x} dx; \\ \mathbf{k}_{44} &= -2\alpha \int_0^l N_{\gamma,x}^T A_{44} (N_{\gamma,x} - N_{w,xx}) dx; & \mathbf{k}_{66} &= \alpha^2 \int_0^l N_{\gamma,x}^T A_{66} N_{\gamma,x} dx; \\ \mathbf{k}_s &= \int_0^l N_{\gamma}^T B_{44} N_{\gamma} dx \end{aligned} \tag{14}$$

Tương tự, động năng của dầm được viết dưới dạng: $T = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right)^T \mathbf{m} \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right)$ (15)

trong đó: m - ma trận khối lượng phần tử nhất quán biểu diễn như sau:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{11} + \mathbf{m}_{12} + \mathbf{m}_{22} + \mathbf{m}_{34} + \mathbf{m}_{44} + \mathbf{m}_{66} \tag{16}$$

và

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{11} &= \int_0^l (N_u^T + N_w^T) I_{11} (N_u + N_w) dx; & \mathbf{m}_{12} &= 2 \int_0^l N_u I_{12} (N_{\gamma} - N_{w,x}) dx; \\ \mathbf{m}_{22} &= \int_0^l (N_{\gamma} - N_{w,x})^T I_{22} (N_{\gamma} - N_{w,x}) dx; & \mathbf{m}_{34} &= -2\alpha \int_0^l N_u^T I_{34} N_{\gamma} dx; \\ \mathbf{m}_{44} &= -2\alpha \int_0^l N_{\gamma,x}^T I_{44} (N_{\gamma} - N_{w,x}) dx; & \mathbf{m}_{66} &= \alpha^2 \int_0^l N_{\gamma}^T I_{66} N_{\gamma} dx; \end{aligned} \tag{17}$$

Các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng phần tử được ghép nối lại để tạo thành ma trận độ cứng và ma trận khối lượng tổng thể cho dầm. Phương trình vi phân chuyển động cho dầm sandwich theo ngôn ngữ phần tử hữu hạn được thiết lập:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{F}^{ex} \tag{18}$$

trong đó: D, M và K tương ứng là véc-tơ chuyển vị nút, ma trận khối lượng và ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu dầm, trong (18) ma trận cần được bỏ qua. Sử dụng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark giải ra được các đáp ứng động cho dầm. \mathbf{F}^{ex} trong (18) là vectơ lực nút của dầm.

3. Kết quả số

Cho dầm sandwich lõi FGM gồm hai pha, gồm (alumina- Al_2O_3 , $E_c= 380 \text{ Gpa}$, $\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$, $\nu=0.3$) và kim loại (nhôm- Al , $E_m= 70 \text{ Gpa}$, $\rho_m= 2702$

Trên biểu thức (12), \mathbf{k} là ma trận độ cứng phần tử được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{11} + \mathbf{k}_{12} + \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{34} + \mathbf{k}_{44} + \mathbf{k}_{66} + \mathbf{k}_s \tag{13}$$

$\text{kg/m}^3, \nu=0.3$). Tham số tần số trong bài báo được chuẩn hóa theo công thức:

$$\mu = \frac{\omega_1 L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{19}$$

Trong công thức (19), μ - tham số tần số cơ bản của dầm, ω_1 - tần số dao động cơ bản của dầm. Tham số động học cho dầm được chuẩn hóa theo công thức (20) như:

$$D_d = \max \left(\frac{w_0(L/2, t)}{w_{st}} \right) \tag{20}$$

Trong (20), $W_{st} = F L^3/48EmI$ là độ võng tĩnh của dầm thép chịu tác dụng lực F tại giữa dầm. Tần số và tham số động lực học trong bảng 1 và 2 được tính toán khi cho $m=0$ và sử dụng các thông số hình học và vật liệu theo tài liệu so sánh. Từ bảng 1 và 2, các kết quả mà bài báo thu được hoàn toàn đáng tin cậy. Các kết quả tính toán cho dầm sandwich dưới đây khi cho tỉ số $L/h=20$.

Bảng 1. So sánh tham số tần số của dầm sandwich lõi FGM ($h_c/h = 0.5, m=0$)

	L/h	n=0	n=0.5	n=1	n=2	n=5	n=10
Tài liệu [2]	5	4.0691	3.7976	3.6636	3.5530	3.4914	3.4830
Bài báo		4.0685	3.7878	3.6484	3.5356	3.4799	3.4795
Tài liệu [2]	20	4.2445	3.9695	3.8387	3.7402	3.7081	3.7214
Bài báo		4.2446	3.9696	3.8379	3.7392	3.7077	3.7215

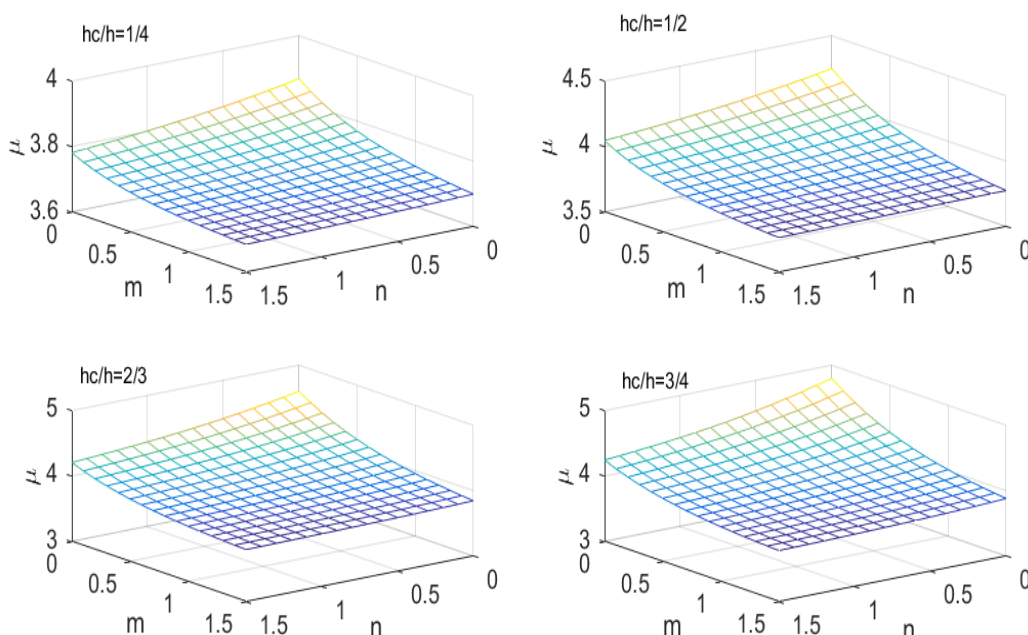
Bảng 2. Tham số động học của dầm tương ứng với tốc độ lực di động ($h_c=h, m=0$)

n	Dd [8]	Dd [bài báo]	v(m/s) [8]	v(m/s) [bài báo]
0.2	1.0344	1.0395	222	221
0.5	1.1444	1.1497	198	197
1	1.2503	1.2561	179	177
2	1.3376	1.3441	164	162
Góm	0.9328	0.9373	252	251
Kim loại	1.7324	1.7408	132	130

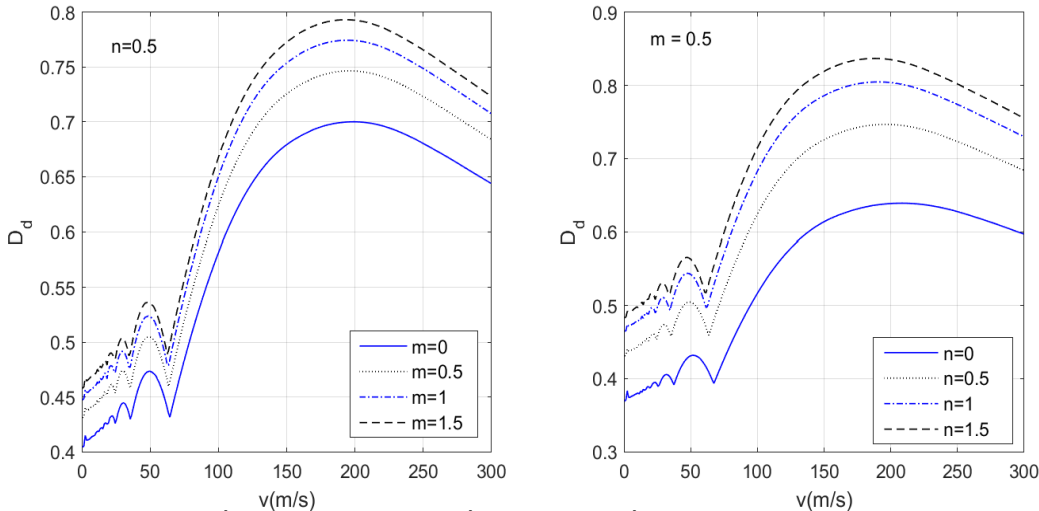
Hình 2 minh họa tham số tần số của dầm sandwich có lõi làm từ vật liệu 2D-FGM với các giá trị khác nhau của n và m. Trên hình vẽ, tác giả cố định tỉ số $L/h=20$, tỉ số h_c/h thay đổi ($h_c/h=14, 1/2, 2/3, 3/4$). Từ hình 2, ta thấy rõ ảnh hưởng của tham số vật liệu, tỉ số h_c/h đến tham số tần số cơ bản của dầm. Với một giá trị n cho trước thì tham số tần số có xu hướng giảm dần khi tăng dần n. Đồng thời sự giảm này rõ hơn khi giá trị m cao. Ảnh hưởng của tham số vật liệu theo chiều dài dầm m cũng giống như ảnh hưởng của tham số vật liệu theo chiều dày dầm. Ngoài ra, hình 2 cũng chỉ ra ảnh hưởng của tỉ số h_c/h đến tham số tần số của dầm. Khi tỉ số h_c/h

mà tăng dần thì tham số tần số cũng tăng dần lên.

Hình 3 chỉ ra mối quan hệ giữa tham số động học và tốc độ của lực di động, hình bên trái cố định tham số vật liệu theo chiều dày ($n=0.5$), thay đổi giá trị tham số vật liệu theo chiều dài ($m=0, 0.5, 1, 1.5$), hình bên phải cố định tham số vật liệu theo chiều dài và thay đổi giá trị tham số vật liệu theo chiều dày ($n=0, 0.5, 1, 1.5$). Hình vẽ đã minh họa, khi tăng tham số vật liệu n, m lên thì tham số động học cũng tăng nhẹ bất kể tham số vật liệu nào thay đổi hay cố định. Ngoài ra, hình 3 chỉ ra sự tăng giảm của tham số động học khi tham số vận tốc của lực di động thay đổi.



Hình 2. Mối quan hệ giữa tham số tần số và các tham số vật liệu n và m



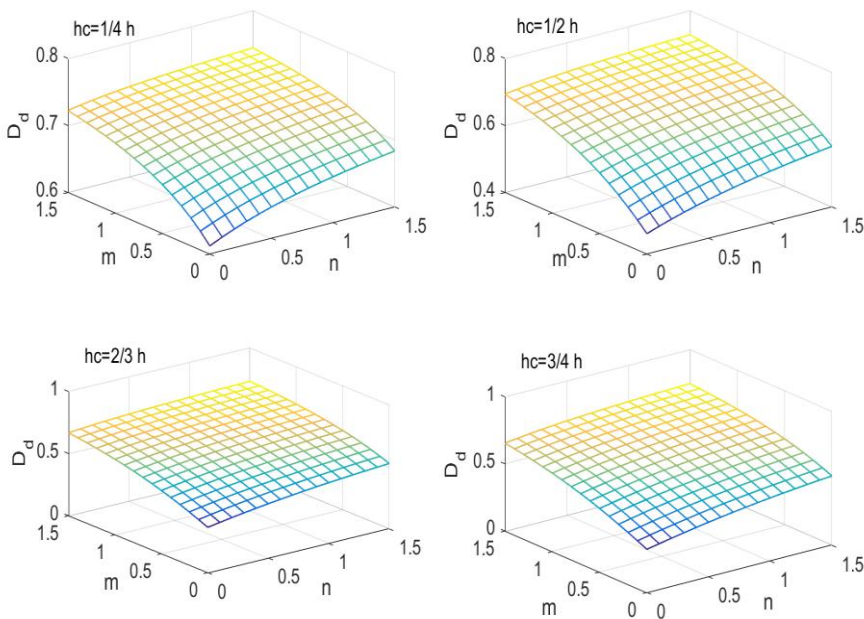
Hình 3. Mối quan hệ giữa tham số động học và tốc độ của lực di động ($hc/h=1/2$)

Hình 4 minh họa mối quan hệ giữa tham số động học và tham số vật liệu n, m khi cho một số giá trị của tỉ số hc/h ($hc/h=14, 1/2, 2/3, 3/4$). Hình vẽ chỉ ra ảnh hưởng rất rõ nét của tham số vật liệu theo chiều dày và chiều dài dầm lên tham số động học của dầm. Khi tham số vật liệu n, m tăng dần lên thì tham số động học tăng mạnh khi tỉ số $hc/h=14, 1/2$, tăng nhẹ khi tỉ số $hc/h= 2/3, 3/4$. Điều này rất dễ hiểu, vì tỉ số hc/h tăng đồng nghĩa lõi dầm 2D-FGM tăng lên làm dầm cứng hơn. Hình 4 chỉ ra rằng, khi tỉ số hc/h có xu hướng tăng dần thì tham số động học lại có xu hướng giảm dần.

4. Kết luận

Bài báo đã phân tích đáp ứng động của dầm sandwich lõi 2D-FGM tựa giản đơn chịu lực di động

bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Dựa trên hàm dạng tuyến tính cho chuyển vị dọc trục và góc trượt ngang, hàm dạng Hermit cho chuyển vị ngang, tác giả thiết lập được ma trận độ cứng và ma trận khối lượng cho dầm sandwich. Dưới sự hỗ trợ của Maple và Matlab, tham số tần số cơ bản của dầm được tính cho một vài giá trị khác nhau của tham số vật liệu, n, m . Kết quả bài báo đã chỉ ra rằng, tham số tần số, tham số động học của dầm sandwich có lõi làm từ vật liệu 2D-FGM chịu ảnh hưởng nhiều bởi tham số vật liệu và tốc độ của lực di động. Các tham số tần số giảm dần khi tham số vật liệu n, m , tăng lên. Tuy nhiên, khi tỉ số hc/h của dầm tăng lên thì tham số động học của dầm lại giảm đi.



Hình 4. Mối quan hệ giữa tham số động học và tham số vật liệu ($v=100m/s$)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Vo, T.P., H.T.Thai, T.K.Nguyen, A.Maheri, and J. Lee (2014). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. *Engineering Structures*, 64, pp. 12-22.
2. Nguyen, T.K., T.T.P. Nguyen, P.T. Vo, and H.T.Thai (2015). Vibration and buckling analysis of FG sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composite Part B*, 76, pp. 273-285.
3. Volkan Kahyaa and Muhittin Turana (2018). Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element. *Composites Part B*, 146, pp. 198-2012.
4. Lê Thị Hà, Trần Thị Trâm (2016). Phân tích ứng xử động của dầm sandwich có vỏ là FGM chịu lực di động. *Tạp chí giao thông vận tải*, số 58, trang 34.
5. M. Simsek (2016). Buckling of timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2d-fgm) having different boundary conditions. *Composite Structures*, 149, 304–314.
6. M. Simsek (2015). Bi-directional functionally graded materials (bdfgms) for free and forced vibration of timoshenko beams with various boundary conditions. *Composite Structures*, 133, 968–978.
7. G.shi and K. Y. Lam (1999). Finite element formulation vibration analysis of composite beams based on higher-order beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 219, pp. 696-610.
8. Şimşek, M., and T. Kocatürk. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load, *Composite Structures* 90(2009), pp.465–473.

Ngày nhận bài: 31/01/2019.

Ngày nhận bài sửa lần cuối: 26/3/2019.