ÁP DỤNG THỪA SỐ LAGRANGE PHÂN TÍCH KẾT CẤU DÀN PHẲNG CÓ ĐIỀU KIỆN BIÊN ĐA BẬC TỰ DO CHỊU TẢI TRỌNG TĨNH

TS. **PHẠM VĂN ĐẠT**
Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

Tóm tắt: *Phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp quan trọng, được sử dụng thường xuyên và không thể thiếu của người kỹ sư khi phân tích và thiết kế kết cấu. Tuy nhiên, khi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do luôn là một vấn đề khó. Vì vậy, trong bài báo này sẽ trình bày cách áp dụng thừa số Lagrange và phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do chịu tải trọng tĩnh.*

Từ khóa: *Phương pháp phần tử hữu hạn, Biên đa bậc tự do, Thừa số lagrange.*

Abstract: *Finite element method (FEM) is now an important and frequently indispensable method of engineering analysis and design structure; However, using finite element method for ananysis of multifreedom equality constraints structures is always a difficult problem. Consequently, this paper will present combined finite element method and lagrange multiplier to analyse two demensional trusses with multi-freedom constraints under dead loads.*

Keywords: *Finite Element Method; Multi-Free Constaints; Lagrange Multiplier.*

1. Đặt vấn đề

Kết cấu dàn là kết cấu có rất nhiều ưu điểm như: tiết kiệm vật liệu, vượt khẩu độ lớn, nhẹ, kinh tế và đặc biệt về phương diện kiến trúc có thể tạo được nhiều hình dáng khác nhau. Vì vậy, kết cấu dàn là một trong những dạng kết cấu được sử dụng rộng rãi để xây dựng nhiều công trình trong nhiều ngành khác nhau như : công trình dân dụng và công nghiệp, công trình cầu đường,…

Các kết cấu dàn trong thực tế thường có số lượng thanh dàn lớn và bậc siêu tĩnh cao, một trong những phương pháp mà các Kỹ sư thiết kế thường sử dụng để phân tích nội lực, chuyển vị của kết cấu dàn là phương pháp phần tử hữu hạn. Phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp rời rạc hóa kết cấu ra thành các phần tử liên kết với nhau tại các nút của phần tử, phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu cuối cùng thường được đưa về viết dưới phương trình dạng ma trận. Các phép tính viết được dưới dạng ma trận thì có thể được thực hiện dễ dàng bằng các phần mềm tính toán toán học, nên việc giải bài toán có số ẩn lớn không còn là một vấn đề khó khi công nghệ thông tin điện tử phát triển như hiện nay.

Các kết cấu thực tế thường có điều kiện biên rất đa dạng, một trong những dạng điều kiện biên là điều kiện biên làm cho chuyển vị thẳng tại nút biên chỉ có thể chuyển vị theo một phương cho trước, mà phương này không trùng với một trục tọa độ nào trong hệ trục tọa độ tổng thể. Điều này dẫn đến các nút biên này có các bậc tự do khác không nhưng không độc lập, mà với nhau ràng buộc nhau. Những nút biên có điều kiện như vậy được gọi là nút có điều kiện biên đa bậc tự do. Ví dụ cho kết cấu dàn chịu lực như hình 1, tại nút C trong hệ trục tọa độ tổng thể có 2 thành phần chuyển vị, nhưng hai thành phần này không độc lập với nhau mà ràng buộc nhau, nên nút C được gọi là nút có điều kiện biên đa bậc tự do.

Việc phân tích kết cấu có điều kiên biên đa bậc tự do theo phương pháp phần tử hữu hạn luôn là một trong những vấn đề khó [7] và các tài liệu trình bày về phương pháp phần tử hữu hạn xuất bản tại Việt Nam tác giả cũng chưa thấy tài liệu nào trình bày [2,4,5]. Vì vậy trong nội dung bài báo này, tác giả sẽ trình bày cách áp dụng thừa số Lagrage để giải bài toán kết cấu có điều kiện biên đa bậc tự do theo phương pháp phần tử hữu hạn.

2. Phương pháp thừa số Lagrage

Phương pháp thừa số Lagrange là phương pháp để đưa bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc về bài toán quy hoạch toán học không ràng buộc [3,10].

Ví dụ xét bài toán quy hoạch toán học:

Hàm mục tiêu: $Z = F(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \min$ (1a)

Các ràng buộc: $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad j = 1 \div m;$ (1b)

Theo phương pháp thừa số Lagrange [3,10] thì bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc trên sẽ tương đương với bài quy hoạch toán học không ràng buộc với:

Hàm mục tiêu mở rộng:
$$L(X,\lambda) = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j . g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \min \tag{2}$$

Trong hàm mục tiêu Lagrange $L(X,\lambda)$, ta xem các thừa số Lagrange cũng là các ẩn số của bài toán, vì vậy điều kiện cần để hàm $L(X,\lambda)$ có cực trị là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & i = 1 \div n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 & j = 1 \div m; \end{cases} \tag{3}$$

Khai triển (3) ta được hệ phương trình gồm (n+m) phương trình độc lập, tương ứng với (n+m) ẩn là: $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Giải hệ phương trình (3) sẽ tìm được giá trị các ẩn số của bài toán.

3. Áp dụng thừa số Lagrange giải bài toán kết cấu dàn có điều kiện biên đa bậc tự do theo phương pháp phần tử hữu hạn

Giả sử hệ kết cấu dàn được rời rạc ra thành m phần tử với tổng số bậc tự do của toàn hệ là n. Theo nguyên lý thế năng toàn phần [1,6,8,9], thế năng toàn phần của hệ là:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{m} \left[\frac{1}{2} \{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e \right] \tag{4}$$

trong đó: $[K']_e$: là ma trận độ cứng của phần tử trong hệ trục tọa độ chung; $\{\delta'\}$: là véctơ chuyển vị nút của toàn hệ trong hệ trục tọa độ chung; $\{F'\}_e$: là tải trọng tác dụng nút của phần tử trong hệ trục tọa độ chung; $[H]_e^T$: là ma trận định vị phần tử trong hệ kết cấu.

Khi bài toán không có điều kiện biên đa bậc tự do, thì dựa vào nguyên lý dừng thế năng toàn phần của hệ kết cấu ta xây dựng được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu có dạng:

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\} \tag{5}$$

trong đó:

$$[K'] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & \cdots & k'_{1n} \\ k'_{21} & k'_{22} & \cdots & k'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k'_{n1} & k'_{n2} & \cdots & k'_{nn} \end{bmatrix}; \qquad \{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad ... \quad \delta'_n\}^T; \qquad \{F'\} = \{F'_1 \quad F'_2 \quad ... \quad F'_n\}^T$$

Khi tại một biên nào đó của kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do và giả sử gọi δ'_i, δ'_{i+1} lần lượt là các số hiệu bậc tự do tại nút biên, thì lúc đó:

$$\delta'_i + k_0 . \delta'_{i+1} = 0 \tag{6}$$

Như vậy khi áp dụng nguyên lý dừng thế năng toàn phần vào bài toán, ta sẽ được bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc:

Hàm mục tiêu:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{m} \left[\frac{1}{2} \{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e \right] \rightarrow \min \tag{7}$$

Điều kiện ràng buộc: $g(\delta') = \delta_i^{'} + k_0.\delta_{i+1}^{'} = 0$ (8)

Áp dụng phương pháp thừa số Lagrange đã trình bày ở mục 2 vào, sẽ đưa bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc đưa về bài toán quy hoạch toán học không ràng buộc bằng các thêm ẩn số là thừa số Lagrange, hàm Lagrange của bài toán lúc này là:

$$L = \sum_{e=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\{\delta'\}^T [H]_e^T [K']_e [H]_e \{\delta'\} - \{\delta'\}^T [H]_e^T \{F'\}_e\right] + \lambda\left(\delta_i^{'} + k_0.\delta_{i+1}^{'}\right) \to \min \quad (9)$$

Số ẩn số của bài toán lúc này sẽ thêm 1 ẩn số so với số ẩn số ban đầu. Như vậy bài toán lúc này có (n+1) ẩn số: $\{\delta'\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad ... \quad \delta'_n \quad \lambda\}^T$

Từ biểu thức (9) ta có: $$\frac{\partial L}{\partial\{\delta'\}} = \left\{\frac{\partial L}{\partial \delta'_1} \quad \frac{\partial L}{\partial \delta'_2} \quad ... \quad \frac{\partial L}{\partial \delta'_{n-1}} \quad \frac{\partial L}{\partial \delta'_n} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right\}^T = 0 \quad (10)$$

Từ điều kiện (10) ta sẽ được phương trình:

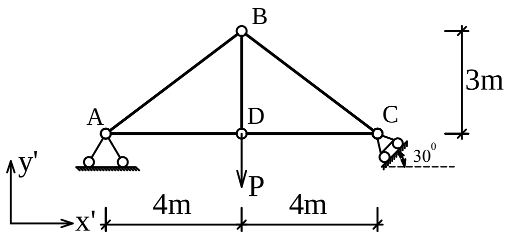
$$\begin{bmatrix} k_{11}^{'} & \cdots & k_{1i}^{'} & k_{1(i+1)}^{'} & \cdots & k_{1n}^{'} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k_{i1}^{'} & \cdots & k_{ii}^{'} & k_{i(i+1)}^{'} & \cdots & k_{in}^{'} & 1 \\ k_{(i+1)1}^{'} & \cdots & k_{(i+1)i}^{'} & k_{(i+1)(i+1)}^{'} & \cdots & k_{(i+1)n}^{'} & k_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k_{n1}^{'} & \cdots & k_{ni}^{'} & k_{n(i+1)}^{'} & \cdots & k_{nn}^{'} & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & k_0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{'} \\ \vdots \\ \delta_i^{'} \\ \delta_{i+1}^{'} \\ \vdots \\ \delta_n^{'} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{'} \\ \vdots \\ F_i^{'} \\ F_{i+1}^{'} \\ \vdots \\ F_n^{'} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Như vậy khi giải bài toán kết cấu dàn phẳng có một biên nào đó có điều kiện biên đa bậc tự do, giả sử gọi $\delta_i^{'}, \delta_{i+1}^{'}$ lần lượt là các số hiệu bậc tự do tại nút biên và có điều kiện ràng buộc (6) lúc đó phương trình cân bằng cho toàn hệ có kể đến một điều kiện biên đa bậc tự do được viết dưới dạng ma trận như biểu thức (11). Theo biểu thức này, ma trận độ cứng của kết cấu khi kể đến một điều kiện biên đa bậc tự do được mở rộng thêm một hàng và một cột so với ma trận độ cứng của kết cấu khi chưa kể đến điều kiện biên đa bậc tự do. Các thừa số trong hàng và cột được mở rộng của ma trận độ cứng được xác định như sau: $k_{n+1,i}^{'} = k_{i,n+1}^{'} = 1;\ k_{n+1,i+1}^{'} = k_{i+1,n+1}^{'} = k_0$, các thừa số còn lại bằng "0". Véctơ tải trọng tác dụng nút được mở rộng thêm một hàng, giá trị thừa số trong véctơ tải trọng tác dụng tại hàng được mở rộng thêm là $F_{n+1}^{'} = 0$.

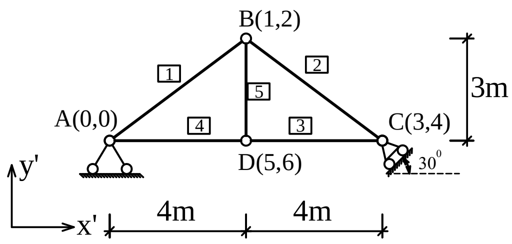
Mở rộng ra khi hệ có r điều kiện biên đa bậc tự do thì ma trận độ cứng sẽ mở rộng thêm r hàng, r cột; véctơ chuyển vị, véctơ tải trọng tác dụng nút thêm r hàng và các giá trị tại các cột và hàng trong các ma trận được mở rộng được xác định tương tự như với hệ có một điều kiện biên đa bậc tự do.

4. Một số ví dụ phân tích

Ví dụ 1: Cho kết cấu dàn chịu lực như hình 1, biết: Mô đun đàn hồi vật liệu của các thanh: $E = 2.10^4\left(kN/cm^2\right)$; diện tích mặt cắt ngang các thanh: $A = 10\left(cm^2\right)$; tải trọng tác dụng: P= 10 (kN). Hãy xác định các thành phần chuyển vị tại các nút và nội lực trong các thanh dàn.



Hình 1. *Ví dụ 1*



Hình 2. *Số hiệu bậc tự do và phần tử*

Lời giải:

Kết cấu dàn được rời rạc hóa thành các phần tử. Số hiệu phần tử và số hiệu mã bậc tự do của các thành phần chuyển vị tại các nút trong hệ tọa độ chung được đánh số như hình 2.

Phương trình cân bằng toàn hệ khi chưa kể đến điều kiện biên đa bậc tự do tại C:

$$\begin{bmatrix} 512 & & & & & (\text{đx}) \\ 0 & 954,667 & & & & \\ 0 & -192 & 756 & & & \\ -256 & -144 & -192 & 144 & & \\ 192 & 0 & -500 & 0 & 1000 & \\ 0 & -666,667 & 0 & 0 & 0 & 666,667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

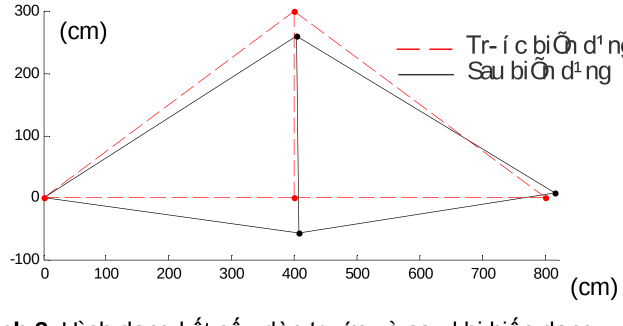
Điều kiện biên tại biên C: $\tan 30^0.\delta'_3 - \delta'_4 = 0$

Vì vậy, khi kể đến điều kiện biên đa bậc tự do tại C thì ma trận độ cứng, ma trận tải trọng trong phương trình cân bằng của toàn hệ được mở rộng thêm. Sau khi mở rộng thêm, phương trình cân bằng toàn hệ được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} 512 & & & & & & (\text{đx}) \\ 0 & 954,667 & & & & & \\ 0 & -192 & 756 & & & & \\ -256 & -144 & -192 & 144 & & & \\ 192 & 0 & -500 & 0 & 1000 & & \\ 0 & -666,667 & 0 & 0 & 0 & 666,667 & \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Kết quả phân tích các thành phần chuyển vị và nội lực của bài toán như sau:

$$\begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0043(\text{cm}) \\ -0,0404(\text{cm}) \\ 0,0151(\text{cm}) \\ 0,0087(\text{cm}) \\ 0,0076(\text{cm}) \\ -0,0554(\text{cm}) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,333(\text{kN}) \\ -8,333(\text{kN}) \\ 3,780(\text{kN}) \\ 3,780(\text{kN}) \\ 10(\text{kN}) \end{Bmatrix}$$



Hình 3. Hình dạng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng

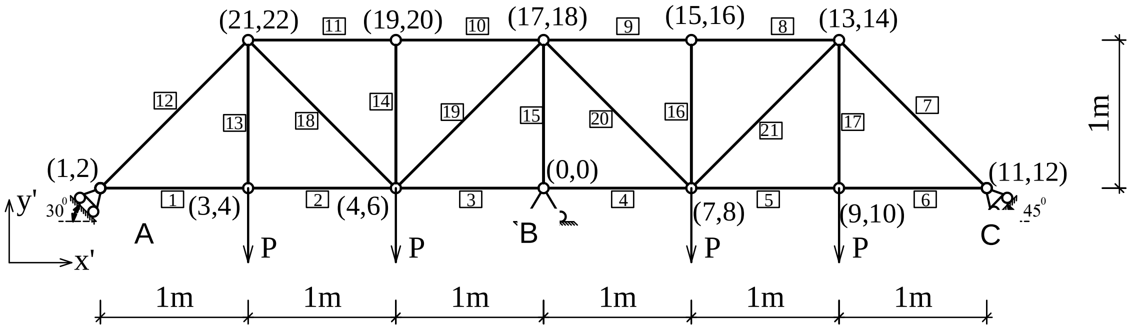
Để kiểm tra độ chính xác của kết quả phân tích, tác giả đã so sánh kết quả phân tích theo phương pháp đề xuất trong bài báo với kết quả phân tích bằng phương pháp tách mắt và được thể hiện như bảng 1:

Bảng 1. *Bảng so sánh kết quả nội lực*

Nội lực	$N_1(kN)$	$N_2(kN)$	$N_3(kN)$	$N_4(kN)$	$N_5(kN)$
Phương pháp PTHH	-8,3333	-8,3333	3,7799	3,7799	10
Phương pháp tách mắt	-8,3333	-8,3333	3,7799	3,7799	10

Theo kết quả so sánh (trong bảng 1) thấy: Khi áp dụng thừa số Lagrange để giải bài toán kết cấu dàn có điều kiện biên đa bậc tự do theo phương pháp phần tử hữu hạn cho kết quả là trùng khớp.

Ví dụ 2: Cho kết cấu chịu lực như hình 4 biết: các thanh có mô đun đàn hồi: $E = 2.10^4\left(kN/cm^2\right)$; diện tích mặt cắt ngang các thanh là: $A = 18\left(cm^2\right)$ $A = 18\left(cm^2\right)$; tải trọng tác dụng: $P = 20\left(kN\right)$. Hãy xác định nội lực trong các thanh.



Hình 4. *Ví dụ 2*

Lời giải

Kết cấu dàn được rời rạc hóa thành các phần tử. Số hiệu phần tử và số hiệu mã bậc tự do của các thành phần chuyển vị tại các nút trong hệ tọa độ chung được đánh số như hình 4.

Điều kiện biên đa bậc tự do tại A: $\tan 30^0.\delta'_1 + \delta'_2 = 0$

Điều kiện biên đa bậc tự do tại C: $\delta'_{11} - \delta'_{12} = 0$

Phương trình cân bằng toàn hệ sau khi kể đến điều kiện biên tại A và B:

$$\begin{bmatrix} k'_{1,1} & k'_{1,2} & \cdots & k'_{1,11} & k'_{1,12} & \cdots & k'_{1,22} & \tan 30^0 \\ k'_{2,1} & k'_{2,2} & \cdots & k'_{2,11} & k'_{2,12} & \cdots & k'_{2,22} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k'_{11,1} & k'_{11,2} & \cdots & k'_{11,11} & k'_{12,12} & \cdots & k'_{11,22} & 0 \\ k'_{12,1} & k'_{12,2} & \cdots & k'_{12,11} & k'_{12,12} & \cdots & k'_{12,22} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k'_{22,1} & k'_{22,2} & \cdots & k'_{22,11} & k'_{22,12} & \cdots & k'_{22,22} & 0 \\ \tan 30^0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \vdots \\ \delta'_{11} \\ \delta'_{12} \\ \vdots \\ \delta'_{22} \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \vdots \\ F'_{11} \\ F'_{12} \\ \vdots \\ F'_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \\ 11 \\ 12 \\ \\ 22 \\ 23 \end{array}$$

Phương trình cân bằng toàn hệ sau khi kể đến điều kiện biên tại A, B và C :

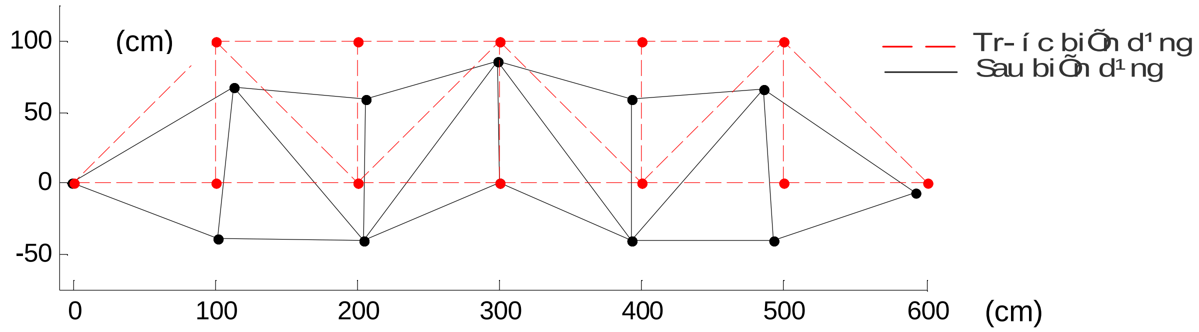
$$\begin{bmatrix} k'_{1,1} & k'_{1,2} & \cdots & k'_{1,11} & k'_{1,12} & \cdots & \tan 30^0 & 0 \\ k'_{2,1} & k'_{2,2} & \cdots & k'_{2,11} & k'_{2,12} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k'_{11,1} & k'_{11,2} & \cdots & k'_{11,11} & k'_{12,12} & \cdots & 0 & 1 \\ k'_{12,1} & k'_{12,2} & \cdots & k'_{12,11} & k'_{12,12} & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tan 30^0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \vdots \\ \delta'_{11} \\ \delta'_{12} \\ \vdots \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \vdots \\ F'_{11} \\ F'_{12} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \\ 11 \\ 12 \\ \\ 23 \\ 24 \end{array}$$

Giải phương trình trên sẽ xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút, sau khi xác định được các thành phần chuyển vị sẽ xác định được nội lực trong các thanh và kết quả nội lực trong các thanh dàn được thể hiện như bảng 2.

Bảng 2. *Kết quả nội lực trong các thanh dàn*

Thanh	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
N(kN)	8,281	8,281	-12,531	-20,812	0	0	-27,710
Thanh	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
N(kN)	-19,188	-19,188	-19,188	-19,188	-27,710	20	0
Thanh	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
N(kN)	-40,812	0	20	-0,574	28,859	28,859	-0,574

Kết quả hình dáng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng được thể hiện như hình 5.



Hình 5. *Hình dạng kết cấu dàn trước và sau khi biến dạng*

5. Kết luận

Qua các nội dung trình bày trong bài báo, có thể rút ra các kết luận sau đây:

- Việc áp dụng thừa số Lagrange để giải bài toán phân tích tuyến tính kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do chịu tải trọng tĩnh tương đối đơn giản do không phải thay đổi lại giá trị các số hạng trong ma trận độ cứng, véctơ tải trọng tác dụng nút.

- Kết quả phân tích tuyến tính bài toán kết cấu dàn phẳng có điều kiện biên đa bậc tự do chịu tải trọng tĩnh khi áp dụng phương pháp thừa số Lagrange là tin cậy. Vì vậy, phương pháp trình bày trong nội dung bài báo có thể áp dụng phân tích tĩnh, tuyến tính kết cấu dàn có các điều kiện biên đa bậc tự do khác nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Văn Đạt (2017), *Tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Xây dựng.

[2] Võ Như Cầu (2005), *Tính kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Xây dựng.

[3] Lê Xuân Huỳnh (2006), *Tính toán kết cấu theo lý thuyết tối ưu*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[4] Chu Quốc Thắng (1997), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.

[5] Nguyễn Trâm (2013), *Phương pháp phần tử hữu hạn và dải hữu hạn*, Nhà xuất bản Xây dựng.

[6] Bathe. K.J (1996), *Finite Element Procedure, Prentice Hall*, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

[7] Felippa. C (2016), *Introduce Finite Element Method*, Public web site for the graduate core course ASEN 5007.

[8] Hutton. D.V (2004), *Fundamentals of Finite Element Analysis*, The McGraw−Hill Companies.

[9] Reza. B, Farhad. S (2013), *Advanced Finite Element Method*, Public web site for the graduate core course ASEN 6367.

[10] William. R. S, Kieth. M.M (2009), *Structural Optimization*, Springer Science+Business Media.

Ngày nhận bài: *09/11/2017.*

Ngày nhận bài sửa lần cuối: *07/02/2018.*