

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ BIÊN TÍNH NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ HỆ DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI THEO MÔ HÌNH WINKLER

TS. VŨ THỊ BÍCH QUYÊN, TS. ĐỖ XUÂN TÙNG

Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

KS. NGUYỄN THẾ THỊNH

Trường Đại học Kỹ thuật công nghiệp Thái Nguyên

Tóm tắt: Bài báo trình bày bài toán dầm trên nền đàn hồi bằng phương pháp phần tử biên. Hệ phương trình giải được xác định từ nghiệm phương trình vi phân dầm trên nền đàn hồi Winkler. Từ đó đưa ra trình tự và thực hiện tính nội lực và chuyển vị hệ dầm theo phương pháp phần tử biên.

Từ khóa: Dầm trên nền đàn hồi, mô hình Winkler, phương pháp phần tử biên.

Abstract: This paper presents the solution of beams on elastic foundation using boundary element method. Based on Winkler foundation, the deflection of the beam is solution of four-order differential equation. Then the internal forces and displacements of the beam system are calculated by using boundary element method.

Key: Beam on elastic foundation, Boundary element method (BEM), Winkler foundation.

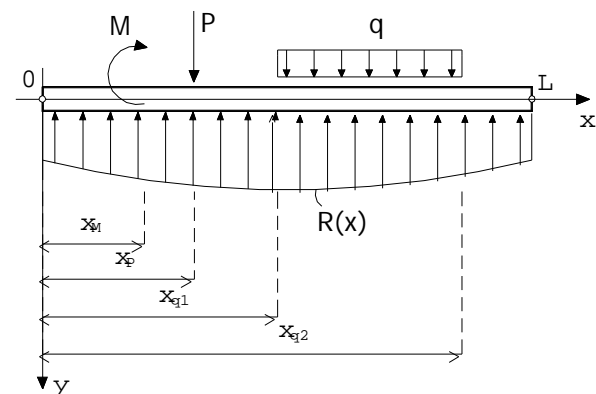
1. Đặt vấn đề

Mô hình dầm trên nền đàn hồi là một mô hình tương đối phức tạp được xây dựng trên cơ sở tương tác giữa đất nền và dầm [9,11]. Việc tìm nghiệm giải tích tường minh cho dầm trên nền đàn hồi chỉ có thể áp dụng cho trường hợp đơn giản. Các hàm nội lực và chuyển vị của dầm trên nền đàn hồi có thể xác định theo phương pháp giải tích số là phương pháp phần tử biên (Boundary Element Method) [6,8]. Phương pháp phần tử biên [7] được xây dựng trên cơ sở rời rạc hóa vật thể tại các biên hình học, trạng thái ứng suất biến dạng bên trong phần tử được xác định theo phương trình tích phân từ biên tới điểm đang xét. Về mặt toán học, phương pháp phần tử biên có ưu điểm phương trình giải được là được xây dựng trên cơ sở dạng mạnh (strong form) so với các phương pháp số khác như phần tử hữu hạn [10] hay sai phân được xây dựng trên cơ sở dạng yếu (weak form). Tuy nhiên quá trình giải bài toán bằng phương pháp phần tử biên phức tạp hơn các phương pháp

khác do cần thực hiện một số thủ thuật toán học để xây dựng phương trình đại số xác định các thông số biên. Bài báo dưới đây sẽ trình bày nội dung chi tiết cách tính nội lực và chuyển vị trong hệ dầm trên nền đàn hồi theo phương pháp phần tử biên.

2. Cơ sở lý thuyết tính nội lực và chuyển vị dầm trên nền đàn hồi mô hình Winkler bằng phương pháp phần tử biên

2.1 Phương trình vi phân đường đàn hồi theo mô hình Winkler [1,5]



Hình 1. Dầm trên nền đàn hồi theo mô hình Winkler

Phương trình vi phân liên hệ hàm chuyển vị $y(x)$ dọc theo trục x và tải trọng $q(x)$ dầm trên nền đàn hồi (hình 1) theo mô hình nền một thông số Winkler có dạng:

$$y^{IV}(x) + 4\alpha^4 y(x) = \frac{q(x)}{EI} \quad ; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (1)$$

Với: EI là độ cứng chịu uốn của mặt cắt ngang; k là hệ số nền;

2.2 Thiết lập hàm nội lực và chuyển vị

Hàm chuyển vị được xác định nghiệm phương trình vi phân thuần nhất [3] và nghiệm riêng là hàm của tải trọng tác dụng $q(x)$. Để biểu diễn tích phân đoạn của hàm tải trọng sử dụng hàm [12] delta Dirac – δ và hàm đơn vị Heviside – H và quy ước dấu “+” như sau:

$$(x-a)_+ = \begin{cases} 0, & \text{khi } x \leq a \\ x-a, & \text{khi } x > a \end{cases}; H(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x \leq a \\ 1, & \text{khi } x > a \end{cases} \quad (2)$$

Hàm tải trọng được biểu diễn dưới dạng:

$$q_y(x) = P\delta(x-x_p) + M\delta'(x-x_M) + q[H(x-x_{q1}) - H(x-x_{q2})] \quad (3)$$

Nghiệm của hàm chuyển vị và các đạo hàm được xác định phụ thuộc vào các thông số ban đầu và tải trọng tác dụng như sau:

$$\begin{Bmatrix} EI.Y(x) \\ EI.\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x) & A_2(x) & -A_3(x) & -A_4(x) \\ A_5(x) & A_1(x) & -A_2(x) & -A_3(x) \\ -A_6(x) & -A_5(x) & A_1(x) & A_2(x) \\ -A_7(x) & -A_6(x) & A_5(x) & A_1(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} EIy(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \\ -B_3(x) \\ -B_4(x) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Trong đó:

$\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ – hàm góc xoay, mô men uốn và lực cắt ngang có mối liên hệ với hàm chuyển vị :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x); \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}; \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{Q(x)}{EI}$$

$$A_1(\alpha x) = \text{ch}\alpha x \cdot \cos\alpha x; A_2(\alpha x) = \frac{\text{ch}\alpha x \cdot \sin\alpha x + \text{sh}\alpha x \cdot \cos\alpha x}{2\alpha}; A_3(\alpha x) = \frac{\text{sh}\alpha x \cdot \sin\alpha x}{2\alpha^2};$$

$$A_4(\alpha x) = \frac{\text{ch}\alpha x \cdot \sin\alpha x - \text{sh}\alpha x \cdot \cos\alpha x}{4\alpha^3}; A_5(\alpha x) = -\alpha(\text{ch}\alpha x \cdot \sin\alpha x - \text{sh}\alpha x \cdot \cos\alpha x)$$

$$A_6(\alpha x) = -2\alpha^2 \text{sh}\alpha x \cdot \sin\alpha x; A_7(\alpha x) = -2\alpha^3(\text{ch}\alpha x \cdot \sin\alpha x + \text{sh}\alpha x \cdot \cos\alpha x)$$

$$B_1(x) = M.A_3[\alpha(x-x_M)_+] + P.A_4[\alpha(x-x_P)] + q[A_8(x-x_{q1})_+ - A_8(x-x_{q2})_+]$$

$$B_2(x) = M.A_2[\alpha(x-x_M)_+] + P.A_4[\alpha(x-x_P)] + q[A_4(x-x_{q1})_+ - A_4(x-x_{q2})_+]$$

$$B_3(x) = M.A_1[\alpha(x-x_M)_+] + P.A_4[\alpha(x-x_P)] + q[A_3(x-x_{q1})_+ - A_3(x-x_{q2})_+]$$

$$B_4(x) = M \cdot \{-4\alpha^4 \cdot A_4[\alpha(x-x_M)_+]\} + P.A_1[\alpha(x-x_P)] + q[A_2(x-x_{q1})_+ - A_2(x-x_{q2})_+]$$

Viết (4) dưới dạng rút gọn: $Y(x) = A(x)X(0) + B(x) \quad (5)$

Trong đó:

$Y(x)$ - ma trận cột hàm chuyển vị và nội lực dọc theo trục thanh (véctơ trạng thái của thanh);

$A(x)$ - ma trận vuông nghiệm cơ bản của phương trình vi phân thuần nhất;

$X(0)$ - ma trận cột chuyển vị và nội lực tại điểm có tọa độ $x=0$ (véctơ thông số ban đầu);

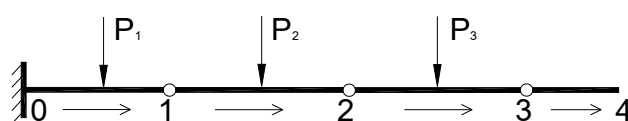
$B(x)$ - ma trận cột hàm chuyển vị và nội lực do tải trọng tác dụng dọc theo trục thanh (véctơ tải trọng);

Tại biên $x=L$ hệ (4) trở thành hệ phương trình đại số với các ẩn số là thông số nội lực và chuyển vị tại biên của phần tử.

3. Xây dựng trình tự tính nội lực và chuyển vị dầm trên nền đàn hồi [4]

Bước 1. Rời rạc hóa hệ thành các phần tử

Chia hệ theo biên hình học thành m các phần tử được liên kết với nhau bởi các nút. Đánh số nút và mũi tên chỉ hướng xác định biên đầu và cuối mỗi thanh (hình 2).



Hình 2. Rời rạc hóa và đánh số nút phần tử

Bước 2. Thiết lập hệ phương trình xác định trạng thái của hệ.

Hệ phương trình trạng thái của hệ được lập bằng cách ghép nối phương trình trạng thái (4) của từng phần tử theo thứ tự rời rạc hóa đã thực hiện ở bước 1.

$$\begin{Bmatrix} Y_1(x) \\ \dots \\ Y_i(x) \\ \dots \\ Y_m(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x) & & & \\ & \dots & & \\ & & A_i(x) & \\ & & & \dots \\ & & & & A_m(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(0) \\ \dots \\ X_i(0) \\ \dots \\ X_m(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1(x) \\ \dots \\ B_i(x) \\ \dots \\ B_m(x) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Bước 3. Thiết lập hệ phương trình đại số xác định các thông số biên của các phần tử.

Hệ phương trình đại số được xây dựng trên cơ sở thay các giá trị tọa độ biên $x=0$ và $x=l$ của mỗi phần tử vào hệ phương trình (6) và nhận được:

$$Y(l) = A(l)X(0) + B(l) \Rightarrow A(l)X(0) - Y(l) = -B(l) \quad (7)$$

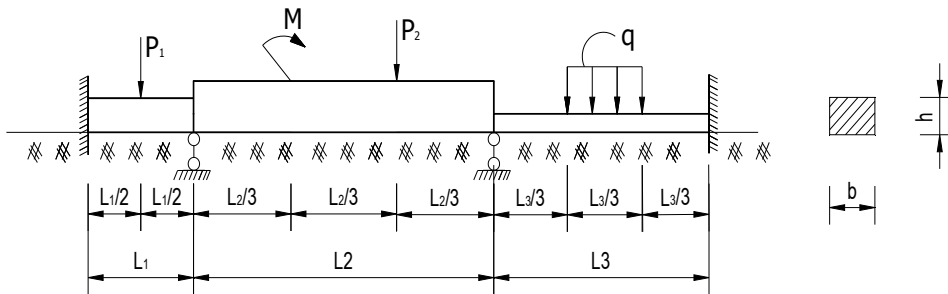
Các ẩn số cần tính là nội lực và chuyển vị biên của các phần tử nằm trong hai ma trận $X(0)$ và $Y(l)$. Để đưa phương trình trên về hệ phương trình đại số tuyến tính cần gán các điều kiện biên tĩnh học và hình học vào các phần tử. Sau đó thực hiện các thủ tục toán học để loại bỏ các ẩn số bằng không và di chuyển các ẩn số khác không từ véc tơ $Y(l)$ sang $X(0)$ nhận được hệ

$$A^*(l)X^*(0,l) = -B(l) \quad (8)$$

Bước 4. Tính nội lực và chuyển vị của dầm

Giải hệ phương trình (7) tính nội lực và chuyển vị biên của các phần tử. Từ đó xác định được hàm nội lực và chuyển vị của mỗi phần tử theo (4) hoặc cả hệ theo (6).

4. Trình tự tính nội lực và chuyển vị dầm trên nền đàn hồi



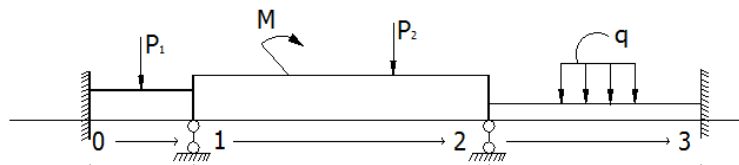
Hình 3. Sơ đồ ví dụ tính dầm trên nền đàn hồi

Thực hiện ví dụ tính nội lực và chuyển vị cho dầm trên nền đàn hồi như trong hình 3. Biết: $L_1=10m$; $L_2=45m$; $L_3=15m$; $P_1=100kN$; $P_2=150kN$; $M=200kN.m$; $q=10kN/m$; $k=1.10^4 kN/m^3$; $E=2.10^7 kN/m^2$, các đoạn dầm có tiết

diện: $b_1=1,0m$; $h_1=0,8m$; $b_2=1,5m$; $h_2=1,0m$; $b_3=1,0m$; $h_3=0,4m$.

Trình tự tính dầm theo phương pháp phần tử biên được thực hiện theo các bước trình bày tại mục 3.

a. Rời rạc hóa hệ thành các phần tử (hình 4).



Hình 4. Rời rạc hóa và đánh số nút phần tử

b. Thiết lập hệ phương trình xác định trạng thái (6) của hệ:

KẾT CẤU – CÔNG NGHỆ XÂY DỰNG

$$\begin{bmatrix} E_{1,y}(x)_{0-1} \\ E_{1,\varphi}(x)_{0-1} \\ M(x)_{0-1} \\ Q(x)_{0-1} \\ E_{2,y}(x)_{1-2} \\ E_{2,\varphi}(x)_{1-2} \\ M(x)_{1-2} \\ Q(x)_{1-2} \\ E_{3,y}(x)_{2-3} \\ E_{3,\varphi}(x)_{2-3} \\ M(x)_{2-3} \\ Q(x)_{2-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x)_{0-1} & A_2(x)_{0-1} & -A_3(x)_{0-1} & -A_4(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_5(x)_{0-1} & A_1(x)_{0-1} & -A_2(x)_{0-1} & -A_3(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6(x)_{0-1} & -A_5(x)_{0-1} & A_1(x)_{0-1} & A_2(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_7(x)_{0-1} & -A_8(x)_{0-1} & A_5(x)_{0-1} & A_1(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(x)_{1-2} & A_2(x)_{1-2} & -A_3(x)_{1-2} & -A_4(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(x)_{1-2} & A_1(x)_{1-2} & -A_2(x)_{1-2} & -A_3(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_6(x)_{1-2} & -A_5(x)_{1-2} & A_1(x)_{1-2} & A_2(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7(x)_{1-2} & -A_8(x)_{1-2} & A_5(x)_{1-2} & A_1(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(x)_{2-3} & A_2(x)_{2-3} & -A_3(x)_{2-3} & -A_4(x)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(x)_{2-3} & A_1(x)_{2-3} & -A_2(x)_{2-3} & -A_3(x)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_6(x)_{2-3} & -A_5(x)_{2-3} & A_1(x)_{2-3} & A_2(x)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7(x)_{2-3} & -A_8(x)_{2-3} & A_5(x)_{2-3} & A_1(x)_{2-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1,y}(0)_{0-1} \\ E_{1,\varphi}(0)_{0-1} \\ M(0)_{0-1} \\ Q(0)_{0-1} \\ E_{2,y}(0)_{1-2} \\ E_{2,\varphi}(0)_{1-2} \\ M(0)_{1-2} \\ Q(0)_{1-2} \\ E_{3,y}(0)_{2-3} \\ E_{3,\varphi}(0)_{2-3} \\ M(0)_{2-3} \\ Q(0)_{2-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(x)_{0-1} \\ B_{21}(x)_{0-1} \\ B_{31}(x)_{0-1} \\ B_{41}(x)_{0-1} \\ B_{11}(x)_{1-2} \\ B_{21}(x)_{1-2} \\ B_{31}(x)_{1-2} \\ B_{41}(x)_{1-2} \\ B_{11}(x)_{2-3} \\ B_{21}(x)_{2-3} \\ B_{31}(x)_{2-3} \\ B_{41}(x)_{2-3} \end{bmatrix}$$

c. Thiết lập hệ phương trình đại số xác định các thông số biên của các phần tử

Thay các giá trị tọa độ biên $x=0$ và $x=l$ của mỗi phần tử vào hệ phương trình và hoán đổi nhận được (7).

$$\begin{bmatrix} A_1(l)_{0-1} & A_2(l)_{0-1} & -A_3(l)_{0-1} & -A_4(l)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_5(l)_{0-1} & A_1(l)_{0-1} & -A_2(l)_{0-1} & -A_3(l)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6(l)_{0-1} & -A_5(l)_{0-1} & A_1(l)_{0-1} & A_2(l)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_7(l)_{0-1} & -A_8(l)_{0-1} & A_5(l)_{0-1} & A_1(l)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(l)_{1-2} & A_2(l)_{1-2} & -A_3(l)_{1-2} & -A_4(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(l)_{1-2} & A_1(l)_{1-2} & -A_2(l)_{1-2} & -A_3(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_6(l)_{1-2} & -A_5(l)_{1-2} & A_1(l)_{1-2} & A_2(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7(l)_{1-2} & -A_8(l)_{1-2} & A_5(l)_{1-2} & A_1(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(l)_{2-3} & A_2(l)_{2-3} & -A_3(l)_{2-3} & -A_4(l)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(l)_{2-3} & A_1(l)_{2-3} & -A_2(l)_{2-3} & -A_3(l)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_6(l)_{2-3} & -A_5(l)_{2-3} & A_1(l)_{2-3} & A_2(l)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7(l)_{2-3} & -A_8(l)_{2-3} & A_5(l)_{2-3} & A_1(l)_{2-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1,y}(0)_{0-1} \\ E_{1,\varphi}(0)_{0-1} \\ M(0)_{0-1} \\ Q(0)_{0-1} \\ E_{2,y}(0)_{1-2} \\ E_{2,\varphi}(0)_{1-2} \\ M(0)_{1-2} \\ Q(0)_{1-2} \\ E_{3,y}(0)_{2-3} \\ E_{3,\varphi}(0)_{2-3} \\ M(0)_{2-3} \\ Q(0)_{2-3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{1,y}(l)_{0-1} \\ E_{1,\varphi}(l)_{0-1} \\ M(l)_{0-1} \\ Q(l)_{0-1} \\ E_{2,y}(l)_{1-2} \\ E_{2,\varphi}(l)_{1-2} \\ M(l)_{1-2} \\ Q(l)_{1-2} \\ E_{3,y}(l)_{2-3} \\ E_{3,\varphi}(l)_{2-3} \\ M(l)_{2-3} \\ Q(l)_{2-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(l)_{0-1} \\ B_{21}(l)_{0-1} \\ B_{31}(l)_{0-1} \\ B_{41}(l)_{0-1} \\ B_{11}(l)_{1-2} \\ B_{21}(l)_{1-2} \\ B_{31}(l)_{1-2} \\ B_{41}(l)_{1-2} \\ B_{11}(l)_{2-3} \\ B_{21}(l)_{2-3} \\ B_{31}(l)_{2-3} \\ B_{41}(l)_{2-3} \end{bmatrix}$$

Gán các điều kiện biên tĩnh học và hình học vào $X(0)$ và $Y(l)$. Từ đó thiết lập các ma trận A^* và X^* theo quy tắc:

- Loại bỏ các hàng có giá trị bằng không trong $X(0)$ và $Y(l)$. Khi loại bỏ hàng thứ "i" có giá trị bằng không của $X(0)$ cho toàn bộ cột thứ "i" của $A(l)$ giá trị bằng không. Trong bài toán đang xét các thông số $E_{1,y}(0)_{0-1}$, $E_{1,\varphi}(0)_{0-1}$, $E_{2,y}(0)_{1-2}$, $E_{3,y}(0)_{2-3}$ hàng 1, 2, 5, 9 của $X(0)$ có giá trị bằng không, do đó gán giá trị toàn bộ cột 1, 2, 5, 9 của $A(l)$ giá trị không.

- Chuyển ghép các thông số khác không từ $Y(l)$ sang $X(0)$, bao gồm:

+ Các thông số độc lập $Q(l)_{0-1}$, $Q(l)_{1-2}$, $M(l)_{2-3}$, $Q(l)_{2-3}$ chỉ có trong $Y(l)$ chuyển sang các hàng có giá trị bằng không trong $X(0)$ (đánh dấu bằng mũi tên đường thẳng liền như hình dưới);

+ Các thông số không độc lập $E_{1,\varphi}(l)_{0-1}$, $M(l)_{0-1}$, $E_{2,\varphi}(l)_{1-2}$, $M(l)_{1-2}$ được ghép chung với các thông số liên hệ trong $X(0)$ (đánh dấu bằng mũi tên đường thẳng đứt nét như hình dưới);

+ Khi chuyển đổi và ghép nối các thông số từ hàng thứ "i" của $Y(l)$ sang hàng thứ "k" $X(0)$ cần bổ sung các hệ số bù vào số hạng A_{ik} tại hàng "i" và cột "k" của A (các số hạng được chỉ mũi tên như hình dưới).

KẾT CẤU – CÔNG NGHỆ XÂY DỰNG

$0 \ 0 \ -A_3(l)_{0-1} \ -A_4(l)_{0-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	1
$0 \ 0 \ -A_2(l)_{0-1} \ -A_3(l)_{0-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	2
$0 \ 0 \ A_1(l)_{0-1} \ A_2(l)_{0-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	3
$0 \ 0 \ A_5(l)_{0-1} \ A_1(l)_{0-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	4
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ A_2(l)_{1-2} \ -A_3(l)_{1-2} \ -A_4(l)_{1-2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	5
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ A_1(l)_{1-2} \ -A_2(l)_{1-2} \ -A_3(l)_{1-2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	6
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -A_5(l)_{1-2} \ A_1(l)_{1-2} \ A_2(l)_{1-2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	7
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -A_6(l)_{1-2} \ A_5(l)_{1-2} \ A_1(l)_{1-2} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	8
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ A_2(l)_{2-3} \ -A_3(l)_{2-3} \ -A_4(l)_{2-3}$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	9
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ A_1(l)_{2-3} \ -A_2(l)_{2-3} \ -A_3(l)_{2-3}$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	10
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -A_5(l)_{2-3} \ A_1(l)_{2-3} \ A_2(l)_{2-3}$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	11
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -A_6(l)_{2-3} \ A_5(l)_{2-3} \ A_1(l)_{2-3}$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	12

Nhận được kết quả:

$$X^*(0, l) = \begin{Bmatrix} Q(l)_{0-1} \\ Q(l)_{1-2} \\ M(0)_{0-1} \\ Q(0)_{0-1} \\ M(l)_{2-3} \\ E l_2 \cdot \varphi(0)_{1-2} \\ M(0)_{1-2} \\ Q(0)_{1-2} \\ Q(l)_{2-3} \\ E l_3 \cdot \varphi(0)_{2-3} \\ M(0)_{2-3} \\ Q(0)_{2-3} \end{Bmatrix} A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_3(l)_{0-1} & -A_4(l)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_2(l)_{0-1} & -A_3(l)_{0-1} & 0 & -1/l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1(l)_{0-1} & A_2(l)_{0-1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & A_5(l)_{0-1} & A_1(l)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2(l)_{1-2} & -A_3(l)_{1-2} & -A_4(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(l)_{1-2} & -A_2(l)_{1-2} & -A_3(l)_{1-2} & 0 & -1/l_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_5(l)_{1-2} & A_1(l)_{1-2} & A_2(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -A_6(l)_{1-2} & A_5(l)_{1-2} & A_1(l)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2(l)_{2-3} & -A_3(l)_{2-3} & -A_4(l)_{2-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(l)_{2-3} & -A_2(l)_{2-3} & -A_3(l)_{2-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_5(l)_{2-3} & A_1(l)_{2-3} & A_2(l)_{2-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -A_6(l)_{2-3} & A_5(l)_{2-3} & A_1(l)_{2-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thay các số liệu vào nhận được hệ phương trình (8):

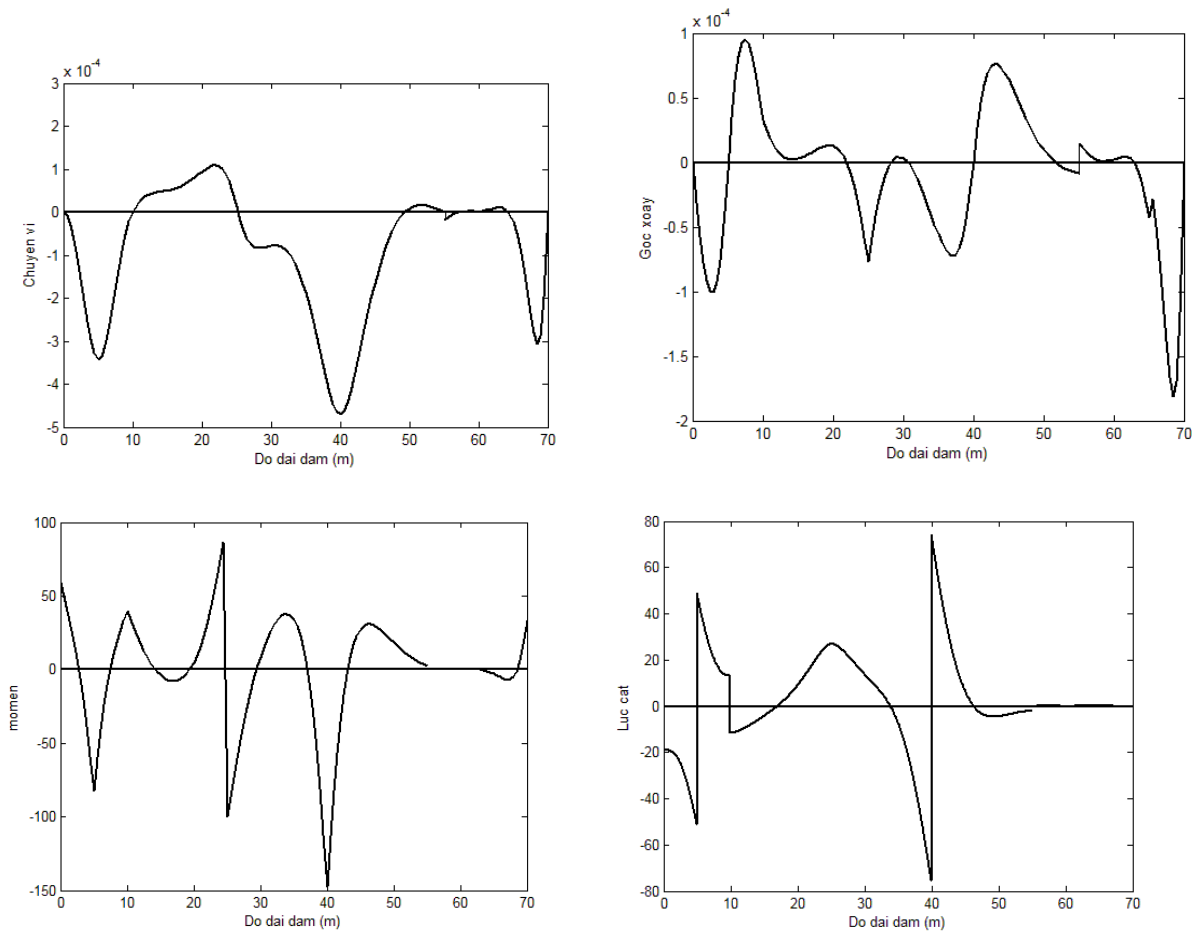
$0 \ 0 \ -147,4 \ -143,9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	1
$0 \ 0 \ -0,7 \ -34,2 \ 0 \ -0,34 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	2
$0 \ 0 \ -3,5 \ 0,7 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	3
$-1 \ 0 \ -1,7 \ -3,5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	4
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3533,7 \ -131366 \ -75495 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	5
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -220,7 \ -3533,7 \ -23360,6 \ 0 \ -23,58 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	6
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 302 \ -220,7 \ 3533,7 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	7
$0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 93,4 \ -302 \ -220,7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	8
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 119,7 \ 584,5 \ 974,1$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	9
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 164,2 \ -119,7 \ 229,1$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	10
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -91,9 \ 164,2 \ 119,7$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	11
$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -21,6 \ 91,9 \ 164,2$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$	12

Bước 4. Tính nội lực và chuyển vị của hệ.

Giải hệ phương trình xác định được các ẩn số biên và thay vào (6) nhận được:

$$\begin{Bmatrix} EI_1 \cdot y(x)_{0-1} \\ EI_1 \cdot \varphi(x)_{0-1} \\ M(x)_{0-1} \\ Q(x)_{0-1} \\ EI_2 \cdot y(x)_{1-2} \\ EI_2 \cdot \varphi(x)_{1-2} \\ M(x)_{1-2} \\ Q(x)_{1-2} \\ EI_3 \cdot y(x)_{2-3} \\ EI_3 \cdot \varphi(x)_{2-3} \\ M(x)_{2-3} \\ Q(x)_{2-3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x)_{0-1} & A_2(x)_{0-1} & -A_3(x)_{0-1} & -A_4(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_5(x)_{0-1} & A_1(x)_{0-1} & -A_2(x)_{0-1} & -A_3(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6(x)_{0-1} & -A_5(x)_{0-1} & A_1(x)_{0-1} & A_2(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_7(x)_{0-1} & -A_6(x)_{0-1} & A_5(x)_{0-1} & A_1(x)_{0-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(x)_{1-2} & A_2(x)_{1-2} & -A_3(x)_{1-2} & -A_4(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(x)_{1-2} & A_1(x)_{1-2} & -A_2(x)_{1-2} & -A_3(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_6(x)_{1-2} & -A_5(x)_{1-2} & A_1(x)_{1-2} & A_2(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7(x)_{1-2} & -A_6(x)_{1-2} & A_5(x)_{1-2} & A_1(x)_{1-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(x)_{2-3} & A_2(x)_{2-3} & -A_3(x)_{2-3} & -A_4(x)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_5(x)_{2-3} & A_1(x)_{2-3} & -A_2(x)_{2-3} & -A_3(x)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_6(x)_{2-3} & -A_5(x)_{2-3} & A_1(x)_{2-3} & A_2(x)_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_7(x)_{2-3} & -A_6(x)_{2-3} & A_5(x)_{2-3} & A_1(x)_{2-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -13,6 \\ 17,3 \\ 0 \\ -863,3 \\ -49,6 \\ 42,6 \\ 0 \\ -30328,6 \\ -16042,5 \\ 13353,0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{11}(x)_{0-1} \\ B_{21}(x)_{0-1} \\ B_{31}(x)_{0-1} \\ B_{41}(x)_{0-1} \\ B_{11}(x)_{1-2} \\ B_{21}(x)_{1-2} \\ B_{31}(x)_{1-2} \\ B_{41}(x)_{1-2} \\ B_{11}(x)_{2-3} \\ B_{21}(x)_{2-3} \\ B_{31}(x)_{2-3} \\ B_{41}(x)_{2-3} \end{Bmatrix}$$

Các biểu đồ nội lực và chuyển vị thể hiện trong hình 5.



Hình 5. Biểu đồ chuyển vị và nội lực dầm

4. Nhận xét

Sử dụng phương pháp phần tử biên tính được kết quả là các hàm nội lực, chuyển vị trên dầm. Các phức tạp về mặt toán học trong quá trình giải có thể khắc phục bằng cách sử dụng các phần mềm lập trình. Trong [2] tác giả đã viết các chương trình tính nội lực và chuyển vị dầm trên nền đàn hồi bằng phần mềm Matlab. Các kết quả nội lực và chuyển vị bằng phương pháp phần tử biên hoàn toàn trùng khớp với kết quả giải tích trong tài liệu Sức bền vật liệu [1]. Tuy nhiên nếu

so sánh với kết quả tính bằng phần mềm SAP có chênh lệch do phương pháp phần tử hữu hạn là phương pháp gần đúng. Có thể thấy sử dụng phương pháp phần tử biên tính nội lực và chuyển vị dầm trên nền đàn hồi Winkler đã kết hợp được ưu điểm của cả hai phương pháp là giải tích và số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lê Ngọc Hồng (2011), Sức bền vật liệu, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

- [2] Nguyễn Thế Thịnh (2017), Nghiên cứu tính nội lực và chuyển vị dầm trên nền đàn hồi bằng phương pháp phần tử biên, *Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học kiến trúc Hà Nội, Hà Nội.*
- [3] Trần Đức Văn (2005), Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng, *NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội.*
- [4] Vũ Thị Bích Quyên (2015), “Phương pháp phần tử biên giải bài toán tĩnh hệ thanh biến dạng đàn hồi”, *Tập 2 - Tuyển tập Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ 12, Đà Nẵng.*
- [5] Edward Tsudic (2013), Analysis of structures on Elastic Foundation, *J. Ross Publishing, USA.*
- [6] Iancu-Bogdan Teodoru (2016), Analysis of beams on elastic foundation, The finite difference approach, *Gheorghe Asachi Techniacl University.*
- [7] P.K. Banerjee and R. Butterfield (1981), Boundary Element Methods in Engineering Science, *McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.*
- [8] Teodoru I.B (2007), “Analysis of beams on elastic foundation: the finite differences approach”, *Proceedings of ‘Juniorstav 2007’, 9-th Technical Conference for Doctoral Study, Brno University of Technology, Czech Republic.*
- [9] Dinev D (2012), “Analytical solution of beam on elastic foundation by singularity functions”, *Engineering MECHANICS, Vol. 19, No. 6, p. 381–392.*
- [10] Farih Hamrit, Brahim Necib, Zied Driss (2015), “Analysis of Mechanical Structures Using Beam Finite Element Method”, *International Journal of Mechanics and Applications, 5(1): 23-30.*
DOI: 10.5923/j.mechanics.20150501.04.
- [11] I.E. Avramidis, K. Morfidis (2006), “Bending of beams on three-parameter elastic foundation”, *International Journal of Solids and Structures 43, pp. 357–375.*
- [12] Лазарян В.А., Конашенко С.И. (1974), *Обобщенные функции в задачах механики, Киев.: Наукова думка.*

Ngày nhận bài: 18/5/2017.

Ngày nhận bài sửa lần cuối: 17/7/2017.