

# **PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG TÍNH TOÁN NỘI LỰC HỆ KHUNG VÒM CYCLOID PHẪNG**

**ThS. LÂM THANH QUANG KHẢI**  
Trường Đại học Cửu Long

*Tóm tắt: Việc sử dụng mô hình phần tử hữu hạn trong tính toán hệ kết cấu khung (cột và dầm ngang) đã trở nên khá đơn giản trong việc tính toán nội lực và chuyển vị của hệ. Tuy nhiên đối với hệ khung vòm (cột và vòm) thì trở nên phức tạp do việc phải xây dựng ma trận độ cứng cho vòm. Tùy thuộc vào vòm đang xét là vòm tròn, vòm parabol, vòm cycloid,... mà ta có ma trận độ cứng khác nhau. Trong bài báo này tác giả đã xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử vòm cycloid từ phương trình trạng thái tại 2 đầu của thanh cong và là cơ sở để xây dựng ma trận độ cứng cho các loại vòm cong khác. Dùng phương pháp phần tử hữu hạn để tính nội lực cho hệ khung vòm cycloid phẳng chịu tải trọng tĩnh.*

*Từ khoá: Vòm cycloid, kết cấu khung, ma trận độ cứng, thanh cong.*

*Abstract: Using the finite element modelling in the frame analysis (column and beam) is much easy normally. But use the “exact” finite element method in the curve system (column and arch) possibly be more complicated due to establishment of the stiffness matrix for the curve (arches) elements. Depending on the arch is considering: the circular arch, parabolic arch, cycloid arch... but have different stiffness matrix. In this paper the authors have built stiffness matrix for cycloid arch element. Using finite element method for calculating flat cycloid arch by static loads.*

*Key words: cycloid arch, frame structure, stiffness matrix, curved bar.*

## **1. Đặt vấn đề**

Kết cấu thanh cong ngày càng được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành: từ ngành xây dựng dân dụng như: những mái vòm của các cổng chào, vòm cuốn trong các công trình văn hóa nghệ thuật, cung điện, nhà thờ,... đến các ngành giao thông như: các loại cầu vòm, cầu dẫn trong các cảng hàng không, bến tàu hoặc cầu vượt trên cạn,...

Trong tính toán thanh cong bằng phương pháp phần tử hữu hạn, ta thường chia thanh cong thành các đoạn thẳng gãy khúc. Tất nhiên khi chia thanh cong thành các đoạn thẳng gãy khúc thì dẫn đến độ chính xác hạn chế do phụ thuộc vào số đoạn chia. Mặt khác khi sử dụng phương trình giải tích của trục cong để tính thanh cong thì hầu như khắc phục được nhược điểm đó. Phương pháp này được cố GS.TSKH. Nguyễn Trâm đề xuất trong luận án tiến sĩ khoa học tại Liên Xô (cũ) [5] và được tác giả nghiên cứu và tiếp tục phát triển phương pháp này để tính toán nội lực và chuyển vị cho các hệ khung vòm phẳng khác nhau. Mặc dù độ chính xác về mặt lý thuyết của phương pháp cao nhưng chưa được quan tâm đúng mức cũng như khá phức tạp trong tính toán. Ngoài ra, khi sử dụng phần tử cong thì số phần tử sẽ ít hơn so với phần tử “thanh-dầm” thông thường, nhưng với tốc độ phát triển mạnh của phần cứng máy tính ngày nay thì vấn đề chia nhiều phần tử khi sử dụng phần tử thông thường dễ dàng được giải quyết do sự mở rộng vượt bậc của bộ nhớ trong và bộ nhớ ngoài so với thập niên 80-90 của thế kỷ trước. Vì thế phần tử cong hầu như không sử dụng trong các chương trình phần tử hữu hạn thương mại. Mặc dù vậy, về mặt lý thuyết việc xây dựng ma trận độ cứng của các phần tử cong còn khá xa lạ đối với các kỹ sư, chuyên gia trong lĩnh vực phần tử hữu hạn và phương pháp số. Do đó, vấn đề nghiên cứu này có ý nghĩa khoa học và thực tiễn nhất định.

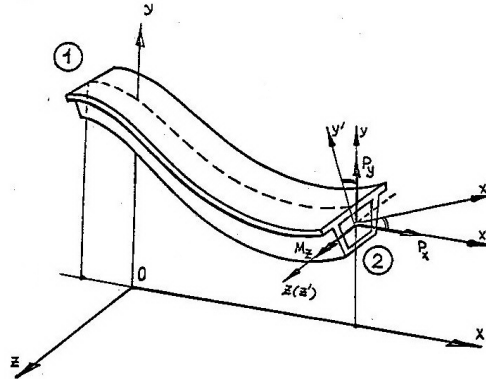
Vì vậy ở đây tác giả đã kết hợp việc sử dụng phương trình giải tích của trục cong để tính ma trận độ cứng cho vòm, từ đó dùng phương pháp phần tử hữu hạn để tính nội lực cho hệ khung vòm cycloid.

## **2. Nội dung nghiên cứu**

Gọi vecto bao gồm các thành phần lực và chuyển vị của tiết diện là vecto  $\{e\}$  gọi là vecto trạng thái trong tiết diện. Như vậy trong không gian 3 chiều vecto  $\{e\}$  này sẽ có tất cả 12 thành phần [1][4], đó là:

$$\{\mathcal{E}\} = [\mathbf{u} \ \mathcal{P}]^T = [U \ \Omega \ M \ P]^T = [u_x u_y u_z \ \omega_x \dots \omega_z \ M_x \dots M_z \ P_x \dots P_z]^T$$

Trong đó:  $u_x, u_y, u_z$ : các thành phần của vecto chuyển vị thẳng;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ : các thành phần của vecto chuyển vị xoay;  $M_x, M_y, M_z$ : các thành phần của vecto mô men;  $P_x, P_y, P_z$ : các thành phần của vecto lực;  $\mathbf{u}$ : vecto chuyển vị tổng quát;  $\mathcal{P}$ : vecto lực tổng quát hoặc tải trọng ngoài.



Hình 1. Phần tử vòm tổng quát

Dưới dạng ma trận, ta có các thành phần trạng thái tại đầu 2 so với tại đầu 1 của thanh cong:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}_2 = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_2 - z_1) & -(y_2 - y_1) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_2 - z_1) & 0 & (x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & 1 & (y_2 - y_1) & -(x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}_1 \quad (1)$$

Để đơn giản (1), ta dùng dạng ma trận chia khối:

$$\{\mathcal{P}_2\} = \begin{Bmatrix} M_2 \\ P_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1_3 & A_{12} \\ 0_3 & 1_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ P_1 \end{Bmatrix} = - [\mathcal{A}_{12}^P] \{\mathcal{P}_1\}$$

Trong đó:  $[A_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & (z_2 - z_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(z_2 - z_1) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & -(x_2 - x_1) & 0 \end{bmatrix}$

$1_3, 0_3$ : ma trận đơn vị và ma trận không có kích thước 3x3

Tương tự ta có:  $\{\mathbf{u}_2\} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ \Omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_3 & A_{21}^T \\ 0_3 & 1_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \Omega_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} U_{bd} \\ \Omega_{bd} \end{Bmatrix} = [\mathcal{A}_{12}^U] \{\mathbf{u}_1\} + \{\mathbf{u}_{bd}\}$

Cuối cùng ta được phương trình trạng thái tại 2 đầu thanh cong bất kỳ:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathcal{P}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}_{12}^U] & [\mathcal{A}_2^{*T}]^{-1} \int [\mathcal{B}] ds [\mathcal{A}_1]^{-1} \\ 0 & -[\mathcal{A}_{12}^P] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathcal{P}_1 \end{Bmatrix}$$

Hay:  $\{\mathcal{E}_j\} = [T_{ij}] \{\mathcal{E}_i\}$

$$\Rightarrow \{\mathcal{E}_j\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathcal{P} \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} T_{uu} & T_{up} \\ T_{pu} & T_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathcal{P} \end{Bmatrix}_i = [T_{ij}] \{\mathcal{E}_i\} \quad (2)$$

Với:  $[T_{uu}] = [\mathcal{A}_{ij}^U]$        $[T_{up}] = [\mathcal{A}_j^{*T}]^{-1} \int [\mathcal{B}] ds [\mathcal{A}_i]^{-1}$        $[T_{pu}] = 0$        $[T_{pp}] = -[\mathcal{A}_{ij}^P]$

Trong đó: T: ma trận đặc trưng cho phần tử cong;  $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$ : vec to trạng thái tại đầu i và j.

$T_{uu}, T_{up}, T_{pu}, T_{pp}$ : ma trận chia khối

Sau khi biến đổi (2) ta được: 
$$\begin{Bmatrix} \mathcal{P}_i \\ \mathcal{P}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{up}^{-1}T_{uu} & T_{up}^{-1} \\ T_{pu} & -T_{pp}T_{up}^{-1}T_{uu} & T_{pp}T_{up}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{U}_i \\ \mathcal{U}_j \end{Bmatrix}$$

Tóm lại ta có ma trận độ cứng K của phần tử vòm sau khi biến đổi: 
$$K_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} [k_{11}] &= -[T_{up}]^{-1}[T_{uu}] = -[\mathcal{A}_i] \int [\mathcal{B}]^{-1} ds [\mathcal{A}_j^{*T}] [\mathcal{A}_{ij}^U] = -[\mathcal{A}_i] \int [\mathcal{B}]^{-1} ds [\mathcal{A}_i^{*T}] \\ [k_{22}] &= [T_{pp}] [T_{up}^{-1}] = -[\mathcal{A}_{ij}^P] [\mathcal{A}_i] \int [\mathcal{B}]^{-1} ds [\mathcal{A}_j^{*T}] = -[\mathcal{A}_j] \int [\mathcal{B}]^{-1} ds [\mathcal{A}_j^{*T}] \\ [k_{12}] &= [T_{up}]^{-1} = [\mathcal{A}_i] \int [\mathcal{B}]^{-1} ds [\mathcal{A}_j^{*T}] \\ [k_{21}] &= [T_{pu}] - [T_{pp}] [T_{up}^{-1}] [T_{uu}] = -[k_{22}] [T_{uu}] = [\mathcal{A}_j] \int [\mathcal{B}]^{-1} ds [\mathcal{A}_i^{*T}] \end{aligned}$$

**2.1 Phần tử vòm phẳng**

Công thức (3) là công thức tính ma trận độ cứng của phần tử vòm không gian. Còn vòm phẳng có trục nằm trong mặt phẳng tọa độ 0xy nên trong bài toán phẳng một số thành phần trong vecto trạng thái sẽ bằng không, do đó ma trận sẽ giảm kích thước từ 12x12 xuống 6x6.

Các vecto  $\{\mathcal{P}\}$  và  $\{\mathcal{U}\}$  mỗi vecto chỉ còn 3 thành phần:

$$\{\mathcal{P}\} = [M_z \quad P_x \quad P_y]^T \quad \{\mathcal{U}\} = [u_x \quad u_y \quad \omega_z]^T$$

Trong đó: các thành phần  $P_z, M_x, M_y, u_z, \omega_x, \omega_y$  không có, do đó các hàng và cột tương ứng trong các ma trận đặc trưng có thể loại bỏ.

Ma trận dạng  $[\mathcal{A}_i] = \begin{bmatrix} 1 & y_i & -x_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_1 & A_i \\ 0 & 1_2 \end{bmatrix}$  với  $[A_i] = [y_i \quad -x_i] \quad (i=1 \div 2)$

$$[\mathcal{A}_{12}^P] = \begin{bmatrix} 1 & (y_2 - y_1) & -(x_2 - x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_1 & A_{12} \\ 0 & 1_2 \end{bmatrix} \text{ với } [A_{12}] = \begin{Bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{Bmatrix}^T$$

$$[H_P] = \begin{bmatrix} \cos x'x & \cos y'x \\ \cos x'y & \cos y'y \end{bmatrix} \quad [H_M] = [\cos z'z]$$

Do đó:  $[\mathcal{H}^*] = \begin{bmatrix} H_P & 0 \\ 0 & H_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x'x & \cos y'x & 0 \\ \cos x'y & \cos y'y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z'z \end{bmatrix}$

Mặt khác ta có: 
$$\begin{cases} \cos x'x = \cos y'y = \frac{dx}{ds} \\ -\cos y'x = \cos x'y = \frac{dy}{ds} \\ \cos z'z = 1 \end{cases}$$

Ma trận  $[\mathcal{H}^*]$  có thể biểu diễn thông qua đạo hàm  $x'_s = \frac{dx}{ds}$  và  $y'_s = \frac{dy}{ds}$

$$[\mathcal{H}^*] = \begin{bmatrix} x'_s & -y'_s & 0 \\ y'_s & x'_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do ma trận  $[\mathcal{H}^*]$  là ma trận vuông phản xứng nên có tính chất sau:

$$[H_P]^{-1} = [H_P]^T \text{ và } [H_M]^{-1} = [H_M]^T \Rightarrow [\mathcal{H}^*]^{-1} = [\mathcal{H}^*]^T = \begin{bmatrix} x'_s & y'_s & 0 \\ -y'_s & x'_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[M_P] = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{(ds)^2}{12EI_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Do } \left( \frac{(ds)^2}{12EI_z} \approx 0 \right)$$

$$[M_M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_z} \end{bmatrix} \quad [m_P] = [H_P][M_P][H_P]^T = \begin{bmatrix} \frac{(x'_s)^2}{EA} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} \\ \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} & \frac{(y'_s)^2}{EA} \end{bmatrix}$$

$$[m_M] = [H_M][M_M][H_M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{EI_z} \end{bmatrix} \quad [m_M][A] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI_z} & -\frac{x}{EI_z} \end{bmatrix}$$

Các ma trận con của  $[\beta]$  có dạng:

$$[A]^T [m_M] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI_z} \\ -\frac{x}{EI_z} \end{bmatrix} \quad [A]^T [m_M][A] = \begin{bmatrix} \frac{y^2}{EI_z} & -\frac{xy}{EI_z} \\ -\frac{xy}{EI_z} & \frac{x^2}{EI_z} \end{bmatrix}$$

$$[m_P] + [A]^T [m_M][A] = \begin{bmatrix} \frac{(x'_s)^2}{EA} + \frac{y^2}{EI_z} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} \\ \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} & \frac{(y'_s)^2}{EA} + \frac{x^2}{EI_z} \end{bmatrix}$$

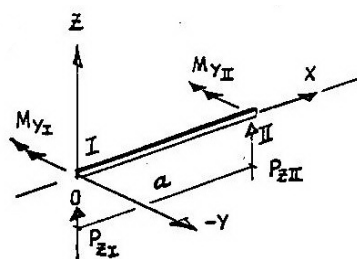
Ghép vào, ta được ma trận  $[\beta]$ :

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \frac{y}{EI_z} & \frac{(x'_s)^2}{EA} + \frac{y^2}{EI_z} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} \\ -\frac{x}{EI_z} & \frac{x'_s \cdot y'_s}{EA} - \frac{xy}{EI_z} & \frac{(y'_s)^2}{EA} + \frac{x^2}{EI_z} \\ \frac{1}{EI_z} & \frac{y}{EI_z} & -\frac{x}{EI_z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 2.2 Phần tử dầm chịu uốn

Để kiểm tra độ chính xác việc xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử vòm phẳng, ta sử dụng ma trận độ phần tử vòm phẳng này để tính ma trận độ cứng cho phần tử thanh thẳng mà ta đã biết ma trận độ cứng.

Xét phần tử thẳng (hình 2), phần tử có 2 bậc tự do ở mỗi đầu.



Hình 2. Phần tử thanh thẳng

Ta có:  $T_{uu} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$   $T_{up} = \frac{a}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{a}{2} & -\frac{a^2}{6} \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$   $T_{pp} = \frac{a}{EI} \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 0 & -a \end{bmatrix}$

Vậy ma trận độ cứng K của phần tử thanh thẳng:

$$k_{12} = T_{up}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{2EI}{a} \\ \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix} \quad k_{11} = -T_{up}^{-1} \cdot T_{uu} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{a^2} & -\frac{4EI}{a} \\ -\frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = T_{pp} \cdot T_{up}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{4EI}{a} \\ -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix} \quad k_{21} = -k_{22} \cdot T_{uu} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \end{bmatrix}$$

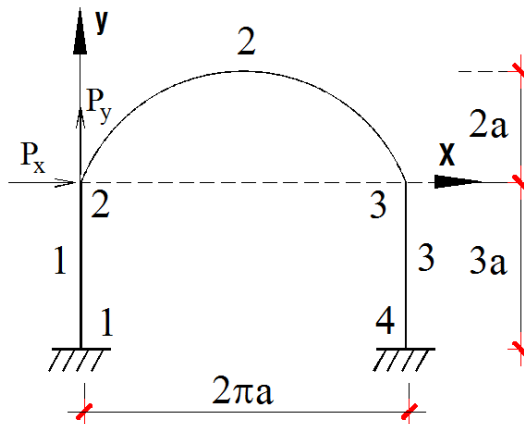
$$\Rightarrow K = \frac{2EI}{a} \begin{bmatrix} \frac{3}{a} & -2 & -\frac{3}{a} & -1 \\ \frac{a}{6} & \frac{3}{a} & \frac{a}{6} & \frac{3}{a} \\ -\frac{a^2}{6} & a & \frac{a^2}{6} & a \\ \frac{3}{a} & -1 & -\frac{3}{a} & -2 \\ \frac{a}{6} & \frac{3}{a} & \frac{a}{6} & \frac{3}{a} \\ \frac{3}{a^2} & -1 & -\frac{3}{a^2} & -2 \\ \frac{a}{6} & \frac{3}{a} & \frac{a}{6} & \frac{3}{a} \\ \frac{3}{a^2} & -1 & -\frac{3}{a^2} & -2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

=> Hoàn toàn giống trong các tài liệu đã xuất bản. Do ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng được suy ra từ ma trận độ cứng của phần tử vòm phẳng đã lập. Mà ma trận độ cứng của phần tử thanh thẳng đứng, vì vậy ma trận độ cứng của phần tử vòm phẳng phải đúng.

**2.3 Hệ khung vòm cycloid [3]**

Sau khi ta xây dựng được ma trận [B] cũng như ma trận độ cứng cho phần tử vòm phẳng. Ta xây dựng ma trận độ cứng cho vòm cycloid.

Xét hệ khung phẳng có thanh trên dạng vòm cycloid, vòm có trục nằm trong mặt phẳng tọa độ oxy, chân cột đứng của khung bị ngàm chặt, chịu tải trọng tác dụng như hình vẽ (hình 3).



**Hình 3. Hệ khung vòm cycloid**

Phương trình chính tắc của vòm cycloid:  $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi) \\ y = a(1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Ta có:  $\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = 2a \sin \frac{\varphi}{2}$

$x'_s = \frac{x'_\varphi}{s'_\varphi} = \frac{a(1 - \cos \varphi)}{2a \sin \frac{\varphi}{2}} = \sin \frac{\varphi}{2} \quad y'_s = \frac{y'_\varphi}{s'_\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{2a \sin \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2}$

Ma trận dạng B:

$$\Rightarrow [B] = \int_0^{2\pi} [B] ds = \begin{bmatrix} \frac{32a^2}{3EI} & \left(\frac{16a}{3EA} + \frac{256a^3}{15EI}\right) & \left(-\frac{32\pi a^3}{3EI}\right) \\ -\frac{8\pi a^2}{EI} & \left(-\frac{32\pi a^3}{3EI}\right) & \frac{8a}{3EA} + \frac{16a^3}{EI} \left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right) \\ \frac{8a}{EI} & \frac{32a^2}{3EI} & -\frac{8\pi a^2}{EI} \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận độ cứng k của phần tử vòm cycloid, với k là ma trận 6x6:  $k_2 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
 [k_{11}] &= -[A_I] \int [B]^{-1} ds [A_I^{*T}] = - \begin{bmatrix} 1 & y_I & -x_I \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_I \\ 0 & 1 & -x_I \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -[B]^{-1} \\
 [k_{22}] &= -[A_{II}] \int [B]^{-1} ds [A_{II}^{*T}] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\pi a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\pi a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [k_{12}] &= [A_I] \int [B]^{-1} ds [A_{II}^{*T}] = \begin{bmatrix} 1 & y_I & -x_I \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_{II} \\ 0 & 1 & -x_{II} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\pi a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [k_{21}] &= [A_{II}] \int [B]^{-1} ds [A_I^{*T}] = \begin{bmatrix} 1 & y_{II} & -x_{II} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_I \\ 0 & 1 & -x_I \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\pi a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]^{-1}
 \end{aligned}$$

Ví dụ: Giả sử cho hệ khung vòm cycloid như (hình 3). Cho  $a=1m$ ,  $P_x = P_y = 10kN$ ,  $E = 210 \times 10^6$  (kN/m<sup>2</sup>),  $A = 0.02$  (m<sup>2</sup>),  $I = 5.10^{-5}$  (m<sup>4</sup>). Vẽ biểu đồ lực dọc, lực cắt, mô men uốn của mỗi phần tử.

**Giải:**

Ta có phương trình phần tử hữu hạn của hệ:  $[K]\{U\} = \{F\}$

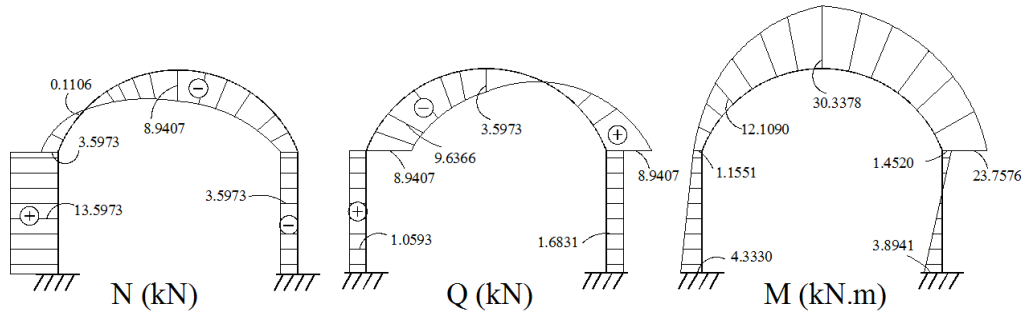
$$[K] \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ \phi_1 \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ \phi_3 \\ U_{4x} \\ U_{4y} \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{2x} \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ \phi_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow 10^6 [6 \times 6] \begin{Bmatrix} U_{2x} \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ U_{3x} \\ U_{3y} \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Các điều kiện biên:  $U_{1x} = U_{1y} = \phi_1 = U_{4x} = U_{4y} = \phi_4 = 0$   $M_2 = F_{3x} = F_{3y} = M_3 = 0$   $F_{2y} = F_{2y} = 10$

Vậy các phản lực gối tựa tại nút 1, 4 (ngàm):

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0593 \\ -13.5973 \\ 4.3330 \\ -1.6831 \\ 3.5973 \\ 3.8941 \end{Bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kN.m \\ kN \\ kN \\ kN.m \end{matrix} \begin{matrix} \text{(sang trái)} \\ \text{(hướng xuống)} \\ \text{(ngược chiều kim đồng hồ)} \\ \text{(sang trái)} \\ \text{(hướng lên)} \\ \text{(ngược chiều kim đồng hồ)} \end{matrix}$$

Biểu đồ lực dọc, lực cắt và mô men uốn của hệ (hình 4):



**Hình 4. Biểu đồ nội lực hệ khung vòm cycloid**

**3. Kết luận**

Trên cơ sở ma trận [B], có thể xây dựng được ma trận độ cứng cho các phần tử vòm khác nhau như: vòm tròn, vòm parabol...

Với cách xây dựng ma trận độ cứng của phần tử vòm từ phương trình giải tích của trục cong có thể sẽ khắc phục được sai số khi chia đoạn cong thành các đoạn thẳng gãy khúc.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

[1]. Lâm Thanh Quang Khải, Nguyễn Trâm (2011), “Ma trận của kết cấu dầm cong chịu lực phức tạp trong không gian 3 chiều”, *Tạp chí xây dựng (ISSN 0866-0762) - Bộ xây dựng*, số tháng 10/2011

[2]. Lâm Thanh Quang Khải (2013), “Xây dựng bài toán dầm cong phẳng dạng vòm parabol chịu tải trọng

phân bố đều”, *Tạp chí xây dựng (ISSN 0866-0762) - Bộ xây dựng*, số tháng 1/2013

[3]. Lâm Thanh Quang Khải (2013), “Xác định nội lực và chuyển vị đứng vòm cycloid chịu nhiều tải trọng tập trung”, *Tạp chí khoa học công nghệ xây dựng (ISSN 1859-1566) – Viện KHCN Xây dựng*, số 1/2013

[4]. Nguyễn Trâm (1995), “Kết cấu dầm cong phẳng chịu lực phức tạp trong không gian 3 chiều”, *Tuyển tập công trình khoa học Trường Đại Học Xây Dựng*, số 3/1995, Tr 11-17

[5]. Nguyễn Trâm, “Lý thuyết tính toán không gian kết cấu nhịp cầu như một hệ tổng thể phức tạp”, *Luận án tiến sỹ khoa học* (bản dịch từ tiếng Nga).

**Ngày nhận bài: 04/6/2016.**

**Ngày nhận bài sửa lần cuối: 04/10/2016.**