

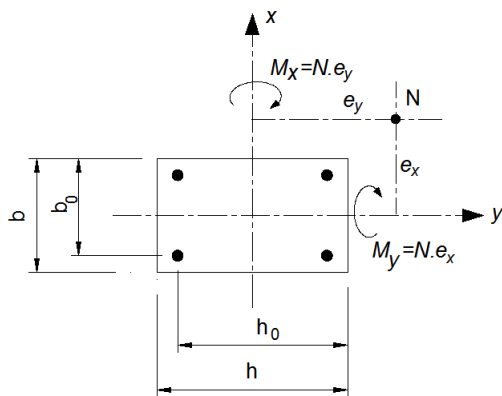
# TÍNH TOÁN CỘT CHỊU NÉN LỆCH TÂM XIÊN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG, KẾT HỢP VỚI BIỂU ĐỒ TƯƠNG TÁC THEO TCVN 5574:2012

ThS. NGUYỄN THỊ NGỌC LOAN  
 Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

Tóm tắt: Bài báo giới thiệu phương pháp xác định khả năng chịu lực của cột chịu nén lệch tâm xiên sử dụng phương trình tải trọng nghịch đảo và phương trình đường viền tải trọng, được giới thiệu bởi Boris Bresler, kết hợp với các họ biểu đồ tương tác được xây dựng theo TCVN 5574:2012.

## 1. Giới thiệu

Cột chịu nén lệch tâm xiên là cột chịu đồng thời một lực nén dọc trục  $N$ , và mô men uốn theo hai phương  $M_x$ ,  $M_y$  lấy đối với các trục chính của tiết diện. Hình 1 biểu thị tiết diện cột chịu nén lệch tâm xiên.



Hình 1. Tiết diện cột chịu nén lệch tâm xiên

Có nhiều phương pháp gần đúng được sử dụng để thiết kế cột. Trong số đó, có phương pháp cộng tác dụng, được giới thiệu bởi Moran, cốt thép được tính riêng với  $(N, M_x)$  và  $(N, M_y)$ , sau đó cộng kết quả lại, chi tiết trong [1]. Phương pháp quy đổi lệch tâm xiên về lệch tâm phẳng được giới thiệu trong [2]. Phương pháp tải trọng nghịch đảo và phương pháp đường viền tải trọng, được giới thiệu bởi Bresler, dựa trên ý tưởng về mặt phá hoại [3]. Dựa vào nghiên cứu của Bresler về mặt phá hoại, đã có nhiều tác giả phát triển các công thức gần đúng để xác định khả năng chịu lực của cột, trong đó có Parme và cộng sự [4], Mavichak và Furlong [5], Hsu

[6]. Các đồ thị để áp dụng các phương trình của Bresler hay của Parme được trình bày trong [7].

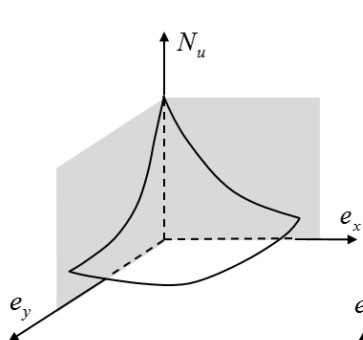
Một phương pháp gần đúng khác được giới thiệu bởi Row và Paulay [8], là sử dụng trực tiếp biểu đồ tương tác cho tiết diện chữ nhật chịu nén lệch tâm xiên. Mỗi biểu đồ chứa bốn góc phần tư, mỗi góc phần tư ứng với một góc đặt tải. Khi góc đặt tải thực tế,  $\theta = \arctan\left(\frac{M_x/h}{M_y/b}\right)$ , không trùng với góc đặt tải trong biểu đồ thì phải nội suy.

Trong bài báo này, các tác giả sử dụng công thức tải trọng nghịch đảo và công thức đường viền tải trọng của Bresler, kết hợp với họ biểu đồ tương tác được xây dựng cho tiết diện chịu nén lệch tâm phẳng, phù hợp với TCVN 5574:2012 [9], để xác định hay kiểm tra khả năng chịu lực của cột chịu nén lệch tâm xiên. Bresler [3] đã làm các thí nghiệm để kiểm chứng công thức, và thấy rằng lực dọc giới hạn được tính theo công thức khá sát với các kết quả thí nghiệm, sai số tối đa là 9,4%, và sai số trung bình là 3,3%.

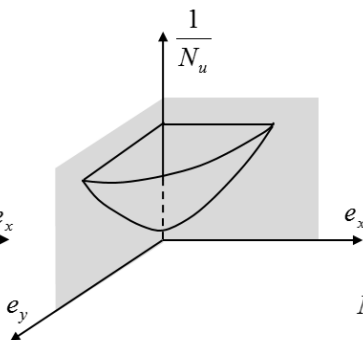
## 2. Phương pháp

### 2.1 Mặt phá hoại và các phương pháp biểu diễn xấp xỉ

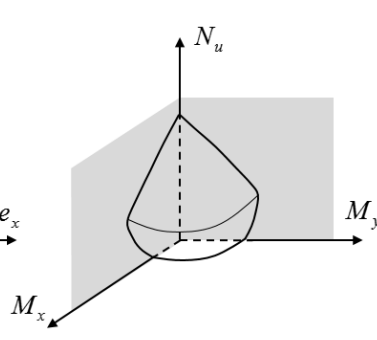
Lực nén giới hạn  $N_u$  tác dụng lên cột với các độ lệch tâm  $e_x$  và  $e_y$  phụ thuộc chủ yếu vào kích thước tiết diện cột, đặc trưng cơ học của vật liệu, số lượng và cách bố trí cốt thép trong tiết diện, ngoài ra nó cũng phụ thuộc vào chiều dày lớp bê tông bảo vệ, loại và cách bố trí cốt đai. Việc thành lập công thức giải tích để xác định lực dọc giới hạn của cột, phụ thuộc vào các tham số nêu trên là khá phức tạp, do sự phức tạp của việc xác định vị trí trục trung hòa. Biểu diễn toán học của lực dọc giới hạn được giả thiết là một hàm tạo nên một mặt phá hoại  $S_1(N_u, e_x, e_y)$ , hình 2. Mặt  $S_1(N_u, e_x, e_y)$  có thể được biểu diễn xấp xỉ như mặt  $S_2\left(\frac{1}{N_u}, e_x, e_y\right)$ , hình 3, hay mặt  $S_3(N_u, M_x, M_y)$ , hình 4.



Hình 2. Mặt phá hoại  $S_1(N_u, e_x, e_y)$



Hình 3. Mặt phá hoại  $S_2\left(\frac{1}{N_u}, e_x, e_y\right)$



Hình 4. Mặt phá hoại  $S_3(N_u, M_x, M_y)$

**Phương pháp tải trọng nghịch đảo:** Phương pháp này được xây dựng dựa vào mặt  $S_2$ , và được biểu diễn xấp xỉ như phương trình (1). Chi tiết của việc biểu diễn xấp xỉ xem trong [3]

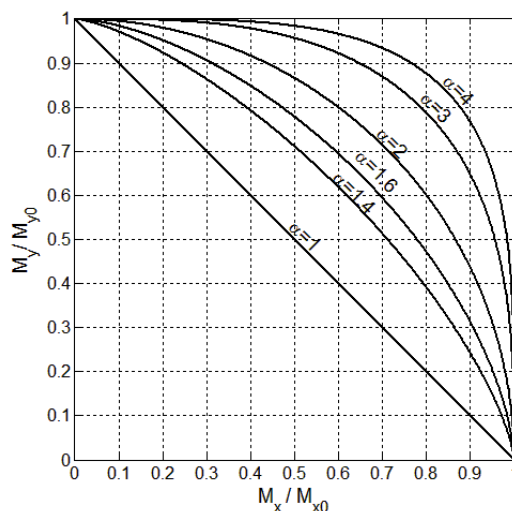
$$\frac{1}{N_u} = \frac{1}{N_{x0}} + \frac{1}{N_{y0}} - \frac{1}{N_{u0}} \quad (1)$$

trong đó,  $N_u$  - giá trị gần đúng của lực nén giới hạn của cột chịu nén lệch tâm xiên, với các độ lệch tâm là  $e_x, e_y$ .  $N_{x0}$  - lực nén giới hạn của cột chịu nén lệch tâm phẳng, với độ lệch tâm là  $e_x$ .  $N_{y0}$  - lực nén giới hạn của cột chịu nén lệch tâm phẳng, với độ lệch tâm là  $e_y$ .  $N_{u0}$  - lực nén giới hạn của cột chịu nén đúng tâm.

**Phương pháp đường viền tải trọng:** Phương pháp này được xây dựng dựa vào mặt  $S_3$ , và được biểu diễn như phương trình (2). Chi tiết của việc biểu diễn xấp xỉ xem trong [3].

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^{\alpha_2} = 1 \quad (2)$$

trong đó:  $M_x, M_y$  lần lượt là mô men thiết kế lấy đối với trục x và trục y,  $M_{x0}, M_{y0}$  lần lượt là mô men giới hạn khi lực dọc chỉ đặt lệch tâm theo phương y, và theo phương x. Các số mũ  $\alpha_1, \alpha_2$  phụ thuộc vào kích thước mặt cắt ngang, diện tích và cách bố trí cốt thép, cường độ của vật liệu, và được xác định bằng thực nghiệm. Bresler gợi ý lấy  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , khi đó, đường tương tác được thể hiện trong hình 5. Trong thiết kế thực hành, có thể lấy  $\alpha = 1,5$  cho tiết diện chữ nhật,  $\alpha = 1,5 \div 2,0$  cho tiết diện vuông.



Hình 5. Đường tương tác để xác định hệ số  $\alpha$

## 2.2 Họ biểu đồ tương tác theo TCVN 5574:2012

Hình 6 biểu thị cột chịu nén lệch tâm phẳng, cốt thép đặt theo chu vi.

Từ hình 6, viết phương trình cân bằng lực lên phương trục cột, và phương trình cân bằng mô men với trục cột, lần lượt được

$$N_u = R_b b x - \sum \sigma_{si} A_{si} \quad (3)$$

$$M_u = N_u \eta e_0 = R_b b x \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2}\right) + \sum \sigma_{si} A_{si} z_{si} \quad (4)$$

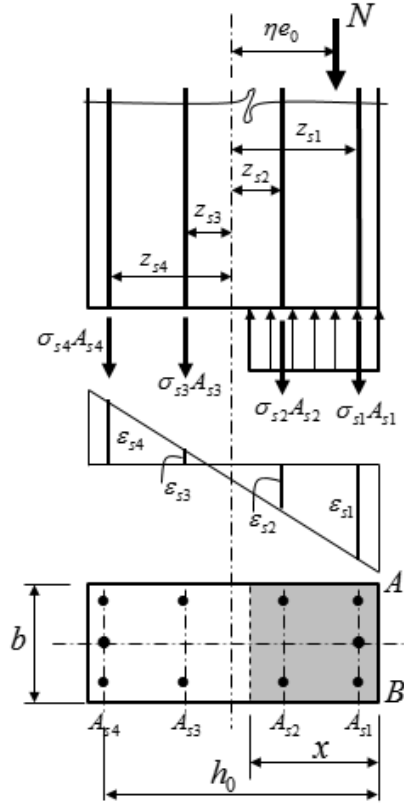
trong đó,  $N_u$  - lực nén giới hạn,  $M_u$  - mô men giới hạn trong mặt phẳng chứa cạnh  $h$ ,  $\eta$  - hệ số kể đến ảnh hưởng của uốn dọc,  $R_b$  - cường độ chịu nén tính toán của bê tông. Các kí hiệu còn lại xem trên hình 6.

Ứng suất trong lớp cốt thép thứ  $i$ ,  $\sigma_{si}$  được tính theo công thức thực nghiệm (5), như dưới đây. Ta thấy rằng, ứng suất  $\sigma_{si}$  phụ thuộc vào hai tham số cơ bản, là cường độ chịu nén tính toán của bê tông  $R_b$ , và chiều cao vùng nén quy đổi  $x$ , (tương ứng là vị trí trục trung hòa).

$$\sigma_{si} = \frac{\sigma_{sc,u}}{1 - \frac{\omega}{1,1}} \left( \frac{\omega}{\xi_i} - 1 \right) \quad (5)$$

$$\xi_i = \frac{x}{h_{0i}} \quad (6)$$

trong đó:  $\sigma_{sc,u} = 500$  (MPa),  $\omega = 0,85 - 0,008R_b$ ,  $h_{0i}$  là khoảng cách từ trọng tâm lớp thép thứ  $i$  đến mép chịu nén AB, xem trên hình 6.



Hình 6. Cột chịu nén lệch tâm phẳng, cốt thép đặt theo chu vi

Trong phương trình (5), nếu  $\sigma_{si} < 0$  thì lớp cốt thép thứ  $i$  chịu nén, nếu  $\sigma_{si} > 0$  thì lớp cốt thép thứ  $i$  chịu kéo. Trong mọi trường hợp, ứng suất trong cốt thép phải thỏa mãn điều kiện  $R_{sc} \leq \sigma_{si} \leq R_s$ , với  $R_{sc}, R_s$  lần lượt là cường độ chịu nén tính toán và cường độ chịu kéo tính toán của cốt thép. Chi tiết của các phương trình (3) đến (6) xem trong [9].

Phương trình (3) đến (6) là bốn phương trình cơ bản được sử dụng để xây dựng các họ biểu đồ

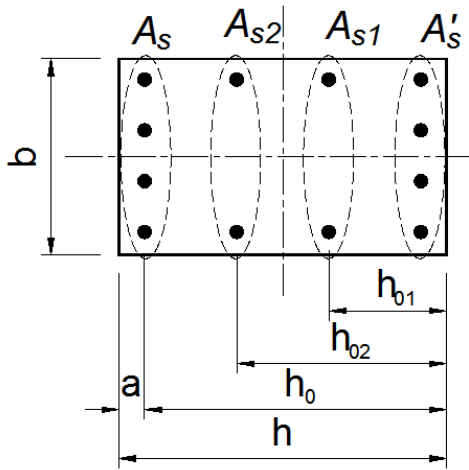
tương tác. Thông thường, các họ biểu đồ được xây dựng không phụ thuộc vào kích thước tiết diện, mà phụ thuộc vào cường độ tính toán của vật liệu,  $R_b, R_s, R_{sc}$ , hàm lượng cốt thép dọc  $\mu_t$ , khoảng cách từ trọng tâm cốt thép đến mép tiết diện  $a/h$ . Ví dụ, áp các phương trình (3) đến (6) cho tiết diện có 12 thanh cốt dọc (trên mỗi cạnh có 4 thanh), hình 7, ta được các phương trình để xây dựng họ biểu đồ tương tác như sau:

$$\frac{N_u}{bh} = R_b \xi \left( 1 - \frac{a}{h} \right) + \frac{1}{3} \mu_t (R_{sc} - \sigma_s) - \frac{1}{6} \mu_t (\sigma_{s1} + \sigma_{s2}) \quad (7)$$

$$\frac{M_u}{bh^2} = R_b \xi \left( 1 - \frac{a}{h} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\xi}{2} \left( 1 - \frac{a}{h} \right) \right) + (R_{sc} + \sigma_s) \frac{1}{3} \mu_t \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{h} \right) - (\sigma_{s1} - \sigma_{s2}) \frac{1}{18} \mu_t \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{h} \right) \quad (8)$$

$$\xi_1 = \frac{x}{h_{01}} = \frac{\xi h_0}{h_{01}} = 3\xi \frac{1 - a/h}{1 + a/h}; \quad \sigma_{s1} = \frac{500}{1 - \frac{0,85 - 0,008R_b}{1,1}} \left( \frac{0,85 - 0,008R_b}{3\xi \frac{1 - a/h}{1 + a/h}} - 1 \right) \quad (9)$$

$$\xi_2 = \frac{x}{h_{02}} = \frac{\xi h_0}{h_{02}} = \frac{3\xi}{2} \frac{(1-a/h)}{(1-a/2h)}; \quad \sigma_{s2} = \frac{500}{1 - \frac{0,85 - 0,008R_b}{1,1} \left( \frac{0,85 - 0,008R_b}{\frac{3\xi}{2} \frac{(1-a/h)}{(1-a/2h)}} - 1 \right)} \quad (10)$$



Hình 7. Tiết diện có 12 thanh cốt dọc

Trong hình 7, ứng suất trong cốt thép  $A'_s$  luôn đạt  $R_{sc}$ , ứng suất trong cốt thép  $A_s$  có thể là ứng suất kéo hay ứng suất nén, và có thể đạt giới hạn chảy hay không, phụ thuộc vào giá trị  $\xi$  cho trước. Nếu  $\xi \leq \xi_R$  thì  $\sigma_s = R_s$ , nếu  $\xi > \xi_R$  thì  $\sigma_s$  được tính theo công thức (11) cho bê tông không lớn hơn B30, hoặc công thức (5), cho bê tông lớn hơn B30, và phải thỏa mãn điều kiện  $-R_{sc} \leq \sigma_s \leq R_s$

$$\sigma_s = \left( \frac{2 - 2x/h_0}{1 - \xi_R} - 1 \right) R_s \quad (11)$$

Từ các phương trình (7) và (8), chọn trước  $R_b, R_s, R_{sc}, a/h$  và cho  $\xi$  chạy trong khoảng [0, 1], cho  $\mu_t = A_{st}/bh$  chạy trong khoảng [0,5%, 6%] ta sẽ vẽ được họ biểu đồ tương tác không phụ thuộc vào kích thước tiết diện ngang, với trục đứng là  $\frac{N_u}{bh}$ , và trục ngang là  $\frac{M_u}{bh^2}$ .

### 3. Ví dụ

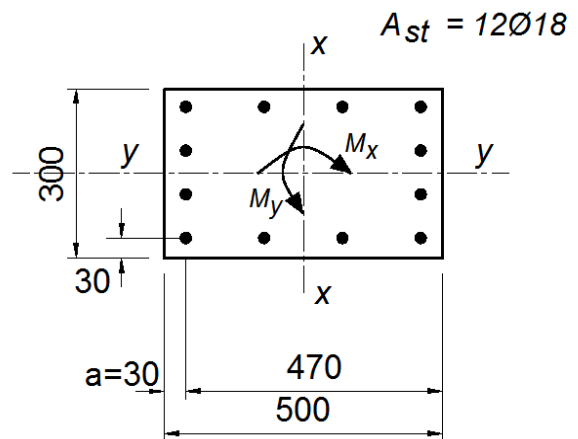
Tính toán cốt dọc cho cột của khung siêu tĩnh chịu nén lệch tâm xiên. Biết kích thước tiết diện là

$300 \times 500 \text{ mm}$ . Độ lệch tâm ngẫu nhiên theo phương  $x$  là  $e_{ax} = 15 \text{ mm}$ , theo phương  $y$  là  $e_{ay} = 10 \text{ mm}$ . Lực nén tính toán  $N = 1500 \text{ kN}$ , mômen uốn tính toán theo hai phương lần lượt là  $M_x = 200 \text{ kNm}$ ,  $M_y = 100 \text{ kNm}$ . Bê tông B25 có  $R_b = 14,5 \text{ MPa}$ , hệ số điều kiện làm việc của bê tông,  $\gamma_b = 1$ , cốt thép nhóm CIII có  $R_s = R_{sc} = 365 \text{ MPa}$ . Hệ số kể đến ảnh hưởng của uốn dọc  $\eta_x = \eta_y = 1,0$ . Chiều dày lớp bê tông bảo vệ  $c_0 = 20 \text{ mm}$ .

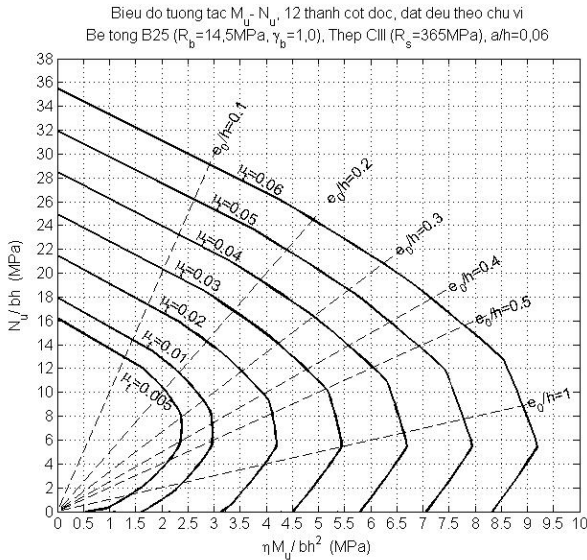
**Lời giải:** Chọn trước cốt thép chịu lực  $12\phi 18$  có

$$A_{st} = 3052 \text{ mm}^2, \mu_t = \frac{A_{st}}{bh} = 2,03\%, \text{ bố trí như hình 8,}$$

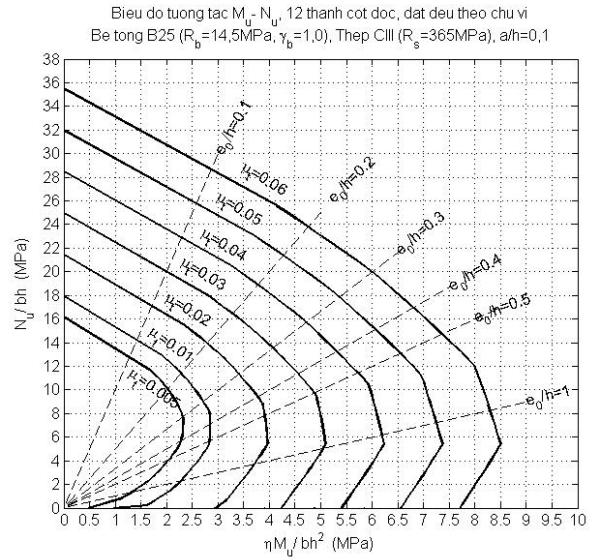
mỗi cạnh có bốn thanh thép, sau đó kiểm tra tiết diện đã chọn theo phương pháp tải trọng nghịch đảo và phương pháp đường viền tải trọng. Họ biểu đồ tương tác cho tiết diện 12 thanh, ứng với  $\frac{a}{h} = 0,06$  và  $\frac{a}{h} = 0,1$  được xây dựng theo TCVN 5574, và được thể hiện trên hình 9 và hình 10. Từ các họ biểu đồ này, ta tra được  $N_{x0}, N_{y0}$  để thay vào phương trình (1), hoặc  $M_{x0}, M_{y0}$  để thay vào phương trình (2).



Hình 8. Tiết diện cột cho ví dụ



**Hình 9.** Họ biểu đồ tương tác,  $a/h=0,06$



**Hình 10.** Họ biểu đồ tương tác,  $a/h=0,1$

**3.1 Kiểm tra cột theo phương pháp tải trọng nghịch đảo**

Lực dọc giới hạn của cột chịu nén đúng tâm,  $N_{u0}$

$$N_{u0} = R_b b h + R_{sc} A_{st} = 14,5 \times 300 \times 500 + 365 \times 3052 = 3288 \text{kN}$$

Lực dọc giới hạn của cột chịu nén lệch tâm theo phương x,  $N_{x0}$

$$e_{1x} = \frac{M_x}{N} = \frac{200 \times 1000}{1500} = 133 \text{mm}$$

$$e_{0x} = \max(e_{1x}, e_{ax}) = 133 \text{mm}$$

$$\frac{M_x}{bh^2} = \frac{200 \times 10^6}{300 \times 500^2} = 2,67$$

Từ biểu đồ hình 9, tra được  $\frac{N_{x0}}{bh} = 15$

$$\therefore N_{x0} = 15 \times 300 \times 500 = 2250 \text{kN}$$

Lực dọc giới hạn của cột chịu nén lệch tâm theo phương y,  $N_{y0}$

$$e_{1y} = \frac{M_y}{N} = \frac{100 \times 1000}{1500} = 66,7 \text{mm}$$

$$e_{0y} = \max(e_{1y}, e_{ay}) = 66,7 \text{mm}$$

$$\frac{M_y}{hb^2} = \frac{100 \times 10^6}{500 \times 300^2} = 2,22$$

Từ biểu đồ hình 10  $\left( \frac{a}{h} = \frac{30}{300} = 0,1 \right)$ , tra được  $\frac{N_{y0}}{bh} = 16$

$$\therefore N_{y0} = 16 \times 500 \times 300 = 2400 \text{kN}$$

Kiểm tra theo phương trình tải trọng nghịch đảo, phương trình (1)

$$\frac{1}{N_u} = \frac{1}{N_{x0}} + \frac{1}{N_{y0}} - \frac{1}{N_{u0}} = \frac{1}{2250} + \frac{1}{2400} - \frac{1}{3288} = \frac{1}{1795}$$

$$\therefore N_{y0} = 1795 \text{kN} > N = 1500. \text{ Cột an toàn}$$

**3.2 Kiểm tra cột theo phương pháp đường viền tải trọng**

$$\frac{N}{bh} = \frac{1500 \times 10^3}{300 \times 500} = 10$$

Tính mômen giới hạn theo phương x,  $M_{x0}$

Tra biểu đồ hình 9, với  $\frac{N}{bh} = 10$ ,  $\mu_t = 0,0203$  và  $\frac{a}{h} = 0,06$  ta được  $\frac{M_{x0}}{bh^2} = 4$

$$\therefore M_{x0} = 4 \times 300 \times 500^2 = 300kNm$$

Tính mômen giới hạn theo phương y,  $M_{y0}$

Tra biểu đồ hình 10, với  $\frac{N}{bh} = 10$ ,  $\mu_t = 0,0203$  và  $\frac{a}{h} = 0,1$  ta được  $\frac{M_{y0}}{hb^2} = 3,6$

$$\therefore M_{y0} = 3,6 \times 500 \times 300^2 = 162kNm$$

Kiểm tra theo phương trình đường viền tải trọng, phương trình (2).

Từ hình 5, có  $\frac{M_x}{M_{x0}} = \frac{200}{300} = 0,67$ ;  $\frac{M_y}{M_{y0}} = \frac{100}{162} = 0,62$ , vậy  $\alpha = 1,6$

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^\alpha = \left(\frac{200}{300}\right)^{1,6} + \left(\frac{100}{162}\right)^{1,6} = 0,98 < 1,0. \text{ Cột an toàn.}$$

#### 4. Kết luận

Bài báo đã trình bày cách áp dụng phương pháp tải trọng nghịch đảo và phương pháp đường viền tải trọng cho việc tính toán lực nén giới hạn cũng như kiểm tra khả năng chịu lực của cột chịu nén lệch tâm xiên theo TCVN 5574:2012. Việc áp dụng này khá đơn giản.

Trong bài toán thiết kế cột chịu nén lệch tâm xiên, thường tiết diện và cốt thép được chọn và thử dần đến khi nó thỏa mãn khả năng chịu lực.

Cách xây dựng họ biểu đồ tương tác phù hợp với TCVN 5574:2012 cũng đã được trình bày. Các họ biểu đồ được xây dựng khá đơn giản, không phụ thuộc vào kích thước tiết diện ngang, mà phụ thuộc vào tỉ số cốt thép  $\mu_t$ , cường độ tính toán của vật liệu,  $R_b, R_s, R_{sc}$ , và khoảng cách từ trọng tâm cốt thép đến mép tiết diện,  $a/h$ .

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R. Park and T. Paulay (1975). *Reinforced concrete structures*. New York.
- [2] BS 8110-1:2005. Structural use of concrete, Part 1: Code of practice for design and construction.
- [3] B. Bresler (1960). Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending. *Journal of the American concrete institute*.
- [4] Parme A. L., Nieves J. M., Gouwens A. (sept. 1966). Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending. *ACI Journal, Proceedings* V.63, No. 9, pp. 911-923.
- [5] V. Mavichak and R.W.Furlong (1976). Strength and stiffness of RC columns under biaxial bending. *Texas State Department of Highways and Public Transportation; Transportation Planning Division*.
- [6] T. Hsu (1988). Analysis and Design of Square and Rectangular Columns by Equation of Failure Surface. *ACI Structural Journal*.
- [7] ACI 340R-97. ACI Design Handbook, Design of Structural Reinforced Concrete Elements in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-97.
- [8] Row D. G., Paulay T.(September 1973). Biaxial flexural and axial load interaction in short rectangular reinforced concrete columns. *Bulletin of the N.Z. Society for Earthquake Engineering*, Vol. 6, No. 3.
- [9] TCVN 5574:2012 (2012), *Tiêu chuẩn thiết kế kết cấu bê tông cốt thép*, Nhà Xuất bản Xây dựng, Hà Nội.

**Ngày nhận bài:13/6/2016.**

**Ngày nhận bài sửa lần cuối:19/9/2016.**