

CÁC PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐỘNG PHI TUYẾN KẾT CẤU THEO LỊCH SỬ THỜI GIAN TRONG SAP2000 (PHẦN 1)

ThS. **TRẦN NGỌC CƯỜNG**
Viện KHCN Xây dựng

Tóm tắt: Bài báo này gồm có hai phần, giới thiệu những phương pháp phân tích động phi tuyến theo lịch sử thời gian được tích hợp sẵn trong phần mềm SAP2000 nhằm giúp những người dùng phổ thông có được những hiểu biết cơ bản về đặc điểm của từng phương pháp cũng như phạm vi áp dụng của chúng. Với mỗi phương pháp, bài báo đưa ra các tính chất cơ bản như: Thuộc họ nội ẩn thức hay ngoại hiển thức, điều kiện ổn định (nếu có), độ chính xác trong kết quả tính toán, độ cản nhót số, từ đó đưa ra phạm vi áp dụng đề xuất. Bài báo cũng đưa ra một số ví dụ tính toán để minh họa và làm rõ tính chất của từng phương pháp.

1. Đặt vấn đề

Vấn đề phân tích động lực học phi tuyến (gọi tắt là động phi tuyến) kết cấu công trình chịu tải trọng động đất theo phương pháp lịch sử thời gian (*nonlinear time-history analyses*) được quan tâm gần đây vì những ưu điểm của nó như: Khắc phục được những nhược điểm của phương pháp phân tích đàn hồi tuyến tính khi thiết kế những công trình có kết cấu đặc biệt, phức tạp (phương pháp này yêu cầu kết cấu phải thỏa mãn nhiều yêu cầu mang tính định lượng theo các điều khoản trong tiêu chuẩn áp dụng), phân tích chính xác hơn ứng xử của kết cấu có thể giúp giảm bớt kích thước tiết diện, làm giảm chi phí đầu tư mà vẫn đảm bảo an toàn khi sử dụng [1].

So sánh với phương pháp phân tích phổ phản ứng dạng dao động (mục 4.3.3.3, [2]), phương pháp phân tích động phi tuyến cho phép xét đến khả năng tiêu tán năng lượng một cách chính xác và đầy đủ hơn là chỉ thông qua một hệ số ứng xử q , đặc biệt với những hệ kết cấu nhà cao tầng hoặc các hệ kết cấu phức tạp mà tiêu chuẩn chưa đề cập hết. Hơn nữa, phân tích động phi tuyến có thể cho biết chính xác vị trí và thời điểm

hình thành khớp dẻo trong kết cấu, trong khi phương pháp phân tích phổ phản ứng dạng dao động không cho biết được điều này. Một ưu điểm nữa của việc phân tích động, đó là có thể dùng nó để hoàn thiện các phương pháp phân tích khác, ví dụ như xây dựng các phổ phản ứng thiết kế hoặc điều chỉnh giá trị hệ số ứng xử q .

Tiêu chuẩn xây dựng thiết kế chống động đất của Việt Nam cũng khuyến khích sử dụng phương pháp động phi tuyến trong phân tích kết cấu công trình (mục 4.3.3., [2]). Tuy vậy trong thực hành, việc thực hiện phân tích động phi tuyến hoặc kể cả đơn giản hơn là phương pháp đẩy dần còn khó khăn và không phải lúc nào cũng thực hiện được, xét theo cả khía cạnh kỹ thuật lẫn kinh tế, do yêu cầu lớn về nguồn nhân lực trình độ cao, năng lực máy tính và thời gian phân tích [1].

Một trong những cách để áp dụng các phương pháp phân tích động phi tuyến theo lịch sử thời gian là sử dụng các phần mềm máy tính được lập trình sẵn. SAP2000 là một phần mềm phân tích kết cấu được sử dụng tương đối rộng rãi ở Việt Nam. SAP2000 có thể tính toán với cả dạng phi tuyến vật liệu và phi tuyến hình học (có xét đến hiệu ứng $P-\Delta$). SAP2000 phiên bản *Advance* và *Ultimate* cho phép phân tích động phi tuyến theo lịch sử thời gian với một số phương pháp được tích hợp sẵn, gồm có: Newmark, Wilson, Collocation, Hilber – Hughes – Taylor, Chung&Hulbert. Việc thực hiện tuần tự các bước để áp dụng các phương pháp này về cơ bản không quá phức tạp, có thể tham khảo những tài liệu chỉ dẫn việc phân tích này trong phần *Trợ giúp* (Help) của chương trình, hoặc tham khảo các video chỉ dẫn tính toán trên trang web chính thức của hãng CSI [3]. Tuy nhiên, người tính toán có thể gặp khó khăn trong việc lựa chọn

phương pháp và các tham số tính toán. Do vậy, bài báo hướng đến những người sử dụng thông thường bằng cách tổng hợp và giúp người dùng nắm được một số những đặc điểm cơ bản nhất của các phương pháp phân tích động phi tuyến theo lịch sử thời gian, nhằm tăng hiệu quả sử dụng SAP2000. Trên cơ sở đó, bài báo có một số nội dung chính như sau:

Phần 1:

- Tóm lược một số kiến thức cơ bản trong phân tích động phi tuyến theo lịch sử thời gian;
- Giới thiệu các phương pháp phân tích được tích hợp sẵn trong SAP2000 và các tính chất của chúng;
- Đưa ra một số khuyến nghị sử dụng cho một số trường hợp tính toán.

Phần 2: (dự kiến đăng trong số tiếp theo của tạp chí)

- Giới thiệu một số ví dụ tính toán bằng SAP2000 nhằm làm rõ các đặc điểm của các phương pháp tính.

2. Các khái niệm cơ bản

Để đánh giá một phương pháp phân tích, người ta dựa vào một vài tiêu chí khác nhau. Theo Hilber, Hughes và Taylor [4], những yêu cầu cơ bản của một phương pháp phân tích phi tuyến theo lịch sử thời gian bao gồm:

(1) Phải không có điều kiện ổn định với hệ kết cấu tuyến tính;

(2) Hệ số tiêu tán số học (*numerical dissipation*) - khái niệm này tương đương với hệ số cản nhớt số (*numerical damping ratio*) sẽ được nhắc đến trong bài báo này - có thể được kiểm soát bằng các tham số thay vì kiểm soát bằng bước thời gian. Ngoài ra, phải có khả năng tính toán với trường hợp không có hệ số tiêu tán;

(3) Hệ số tiêu tán số học không được ảnh hưởng quá lớn đến các dạng dao động bậc thấp.

Ngoài ra, còn một tiêu chí khác được chấp nhận tương đối rộng rãi trong nhiều tài liệu, ví dụ như [5], đó là:

(4) Phải có độ chính xác cấp 2 (sai số lấy đến $(\Delta t)^2$).

Bài báo sẽ bám theo bốn tiêu chí này để đánh giá các phương pháp tính.

2.1 Ngoại hiển thức, nội ẩn thức

Theo [6], những phương pháp thuộc họ ngoại hiển thức (*explicit*) là những phương pháp có dạng: $\{D\}_{i+1} = f(\{D\}_i, \{\dot{D}\}_i, \{\ddot{D}\}_i, \{D\}_{i-1} \dots)$ (1)

trong đó, giá trị (chuyển vị, vận tốc, gia tốc...) của bước thứ $(i+1)$ có thể được tính trực tiếp từ các giá trị của các bước trước đó. Những phương pháp thuộc họ nội ẩn thức (*implicit*) có dạng:

$$\{D\}_{i+1} = f(\{\dot{D}\}_{i+1}, \{\ddot{D}\}_{i+1}, \{D\}_i, \dots) \quad (2)$$

trong đó, giá trị của bước thứ $(i+1)$ không chỉ liên quan đến các giá trị của các bước trước đó mà còn liên quan đến giá trị của chính bước hiện tại, do vậy, để tính cần giải phương trình để tìm ra nghiệm. Phương pháp thường dùng để giải phương trình được áp dụng trong SAP2000 là phương pháp tính lặp *Newton Raphson* và *Newton Raphson cải tiến* (*Modified Newton Raphson*).

Những ưu điểm và nhược điểm của hai họ phương pháp này có thể chỉ ra như sau [7]:

Với họ phương pháp ngoại hiển thức:

- Ưu điểm:
 - Ít mất công tính toán hơn trong một bước;
 - Thuật toán đơn giản, logic, dễ áp dụng với kết cấu phi tuyến;
 - Cần ít dùng bộ nhớ máy tính hơn khi tính toán (so sánh với họ nội ẩn thức tính bằng vòng lặp *Newton Raphson*);
 - Thích hợp để thử các thuật toán mới vì viết các đoạn mã chương trình máy tính đơn giản hơn;
 - Độ tin cậy và chính xác cao hơn.
- Nhược điểm:
 - Có điều kiện ổn định, do vậy nhiều trường hợp số bước tính toán yêu cầu rất lớn.

Bên cạnh đó, khi so sánh với họ phương pháp nội ẩn thức, những ưu điểm của họ phương pháp ngoại hiển thức là nhược điểm của họ nội ẩn thức và ngược lại.

▪ Ưu điểm:

- Không có điều kiện ổn định nên giá trị bước thời gian có thể lớn hơn nhiều lần so với họ phương pháp ngoại hiển thức.

▪ Nhược điểm:

- Chương trình tính toán thường lớn và phức tạp, ví dụ như khi sử dụng phương pháp tính lặp Newton Raphson;

- Độ tin cậy kém hơn;

- Tốn nhiều dung lượng xử lý hơn.

2.2 Phạm vi áp dụng của mỗi phương pháp

Theo [8], các bài toán động lực học công trình được chia làm hai dạng chính:

- Dạng 1 là các bài toán dạng truyền sóng (*wave propagation problems*), ví dụ như khi công trình chịu tác động va chạm hoặc các vụ nổ. Trong dạng này, ảnh hưởng của các dạng dao động tần số cao đến tổng thể công trình là đáng kể và ta cần phải quan tâm đến hiệu ứng của các sóng ứng suất. Thời gian bị ảnh hưởng của công trình thường là ngắn.

Dạng 2 là các bài toán động lực học (*structural dynamics problems*), được định nghĩa là những bài toán không nằm trong dạng 1, ví dụ như khi tác động của động đất. Trong dạng này, lực quán tính đóng vai trò quan trọng trong ứng xử tổng thể của công trình, công trình chịu ảnh hưởng của các dạng dao động bậc thấp là chủ yếu.

Do có điều kiện ổn định nên phương pháp ngoại hiển thức thường được dùng để giải các bài toán thuộc dạng 1. Thông thường giá trị bước thời gian được chọn thỏa mãn điều kiện ổn định thì điều kiện về độ chính xác cũng tự động được thỏa mãn. Với các bài toán động lực học, thường chiếm đa số trong các bài toán về xây dựng, phương pháp nội ẩn thức thường được chọn do không có điều kiện ổn định. Trong trường hợp này, bước thời gian tính toán không chọn theo điều kiện ổn định mà chọn theo yêu cầu về độ chính xác trong kết quả tính.

2.3 Sai số tương đối của chu kỳ

Để đánh giá độ chính xác trong kết quả của mỗi phương pháp phân tích động phi tuyến, khái niệm sai số tương đối của chu kỳ (*relative period error*) được sử dụng và được tính bằng:

$$PE = \frac{(\bar{T} - T)}{T} \quad (3)$$

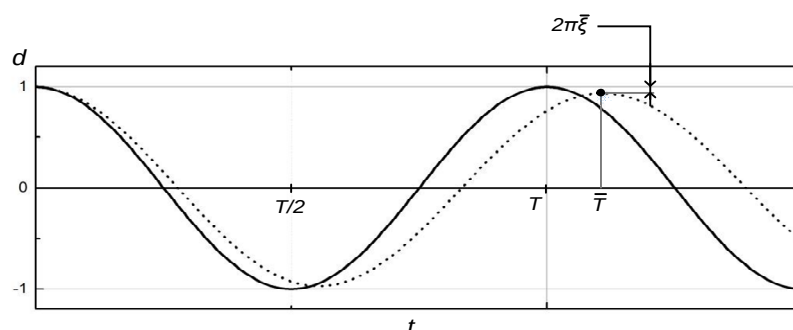
trong đó:

PE là ký hiệu của sai số tương đối của chu kỳ (*Period Error*).

$\bar{T}$ là chu kỳ dao động của hệ kết cấu tính bằng phương pháp phân tích phi tuyến theo lịch sử thời gian.

T là chu kỳ dao động thực.

Sai số tương đối của chu kỳ được mô tả như trong hình 1 [9]. Việc tính toán các thông số này thường phức tạp và cần sử dụng đến máy tính. Sai số tương đối của chu kỳ càng nhỏ thì kết quả tính sẽ càng chính xác.



Hình 1. Các thông số đánh giá độ chính xác của phương pháp tính

2.4 Hệ số cản nhót số

Các phương pháp phân tích phi tuyến theo lịch sử thời gian hiện tại thường cho kết quả không chính xác với các dạng dao động bậc cao,

thêm vào đó, với các bài toán động lực thuộc dạng 2 thì ảnh hưởng của các dạng dao động bậc cao với tổng thể kết cấu là không đáng kể, do vậy hệ số cản nhót số (*algorithmic damping ratio*)

hoặc *numerical damping ratio*) có tác dụng làm tắt nhanh chóng ảnh hưởng của các dạng dao động bậc cao trong khi không làm ảnh hưởng đến độ chính xác của các dạng dao động bậc thấp. Một phương pháp tính được đánh giá là tốt nếu nó có khả năng kiểm soát và điều chỉnh hệ số cản nhớt số bằng cách thay đổi các tham số tính toán. Trong mỗi phương pháp được giới thiệu ở mục 3, các giá trị này đều được đưa ra làm cơ sở so sánh.

3. Các phương pháp phân tích

3.1 Phương pháp Newmark

Phương pháp Newmark [10] là phương pháp được biết đến rộng rãi nhất trong tất cả các phương pháp phân tích động phi tuyến theo lịch sử thời gian. Phương trình mô tả phương pháp này được viết như sau:

$$M\ddot{a}_{i+1} + C\dot{v}_{i+1} + Kd_{i+1} = F_{i+1}$$

$$d_{i+1} = d_i + (\Delta t)v_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}[(1-2\beta)a_i + 2\beta a_{i+1}] \quad (4)$$

$$v_{i+1} = v_i + (\Delta t)[(1-\gamma)a_i + \gamma a_{i+1}]$$

Có rất nhiều cách để lựa chọn các hệ số β và γ cho phương pháp này, tuy nhiên có 4 cách lựa chọn được biết đến rộng rãi nhất như sau:

Bảng 1. Các phương pháp thường dùng trong họ phương pháp Newmark

Tên thường gọi bằng tiếng Anh	Kiểu	β	γ	Điều kiện ổn định (*)	Hệ số cản nhớt số
Average Acceleration Method (AAM)	Nội ẩn thức	1/4	1/2	Không	Không
Linear Acceleration Method	Nội ẩn thức	1/6	1/2	$\Omega_{crit} = 2\sqrt{3} \cong 3,464$	Không
Fox-Goodwin Method	Nội ẩn thức	1/12	1/2	$\Omega_{crit} = \sqrt{6} \cong 2,449$	Không
Newmark Explicit Method (NEM)	Ngoại hiển thức	0	1/2	$\Omega_{crit} = 2$	Không

(*) Điều kiện ổn định của phương pháp được tính theo công thức: $\Omega = \omega(\Delta t) = (2\pi / T)(\Delta t) \leq \Omega_{crit}$ hay $\Delta t / T \leq \Omega_{crit} / (2\pi)$, với T là chu kỳ dao động lớn nhất của hệ kết cấu. Điều kiện ổn định còn phụ thuộc vào độ cản nhớt vật lý của hệ kết cấu, ở đây xét với trường hợp không có cản nhớt vật lý ($\xi = 0$).

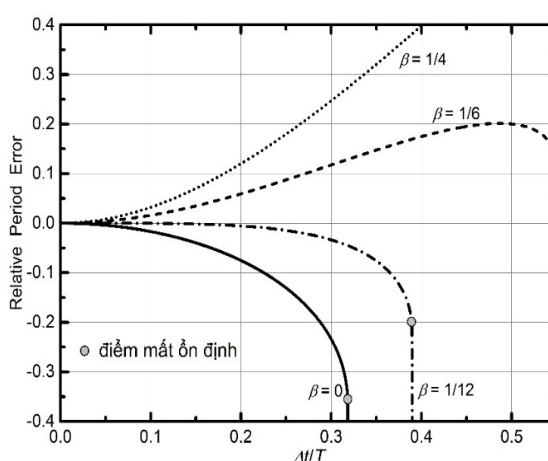


Figure 3. Variation of relative period error with $\Delta t / T$ for PFM

Hình 2. Sai số tương đối của chu kỳ ứng với trường hợp $\gamma = 1/2$

Trong 4 phương pháp này thì hai phương pháp AAM và NEM thường được dùng nhiều hơn. Tất cả các phương pháp này đều không có hệ số cản nhớt số (thực tế là phương pháp

Newmark có thể có hệ số cản nhớt số với $\gamma > 1/2$, tuy nhiên nó sẽ làm giảm độ chính xác của kết quả tính từ bậc 2 xuống bậc 1 nên trường hợp này thường ít được quan tâm). Sau này, chúng

được điều chỉnh cải tiến để đưa thêm hệ số cản nhớt số vào như phương pháp HHT sẽ nói ở mục 0. Sai số tương đối của chu kỳ của cả 4 phương pháp này được trình bày trong hình 2. Hình 2 cho thấy nếu xét về độ chính xác trong kết quả tính toán thì trường hợp $\beta = 1/12$ cho kết quả chính xác hơn cả, tuy nhiên, nó lại có điều kiện ổn định. Trường hợp $\beta = 1/2$ thường được dùng do nó không có điều kiện ổn định. Với $\beta = 0$, dù có điều kiện ổn định nhưng lại hay được dùng để đối chiếu kết quả vì nó là phương pháp ngoại hiển thức.

3.2 Phương pháp Wilson Theta

Giả thiết cơ bản của phương pháp Wilson Theta [11] đó là gia tốc của hệ kết cấu thay đổi tuyến tính trong khoảng thời gian từ thời điểm t đến thời điểm $t + \theta(\Delta t)$ với $\theta \geq 1$ và θ được xác định dựa vào việc tối ưu hóa độ ổn định và độ chính xác của kết quả tính toán. Gọi τ là khoảng thời gian tính thời điểm t đến thời điểm đang xét, với $0 \leq \tau \leq \theta(\Delta t)$, $\theta \geq 1$; như vậy trong khoảng thời gian từ t đến thời điểm $t+\theta(\Delta t)$, ta có:

$$a_{t+\tau} = a_t + \frac{\tau}{\theta(\Delta t)} [a_{t+\theta(\Delta t)} - a_t] \quad (5)$$

Tích phân công thức (5) để có vec-tơ vận tốc như sau:

$$v_{t+\tau} = v_t + \tau a_t + \frac{\tau^2}{2(\theta(\Delta t))} [a_{t+\theta(\Delta t)} - a_t] \quad (6)$$

Tích phân một lần nữa từ công thức (6) để thu được vec-tơ chuyển vị:

$$d_{t+\tau} = d_t + \tau v_t + \frac{\tau^2}{2} a_t + \frac{\tau^3}{6(\theta(\Delta t))} [a_{t+\theta(\Delta t)} - a_t] \quad (7)$$

Ở thời điểm $t+\theta(\Delta t)$, ta có:

$$v_{t+\theta(\Delta t)} = v_t + \frac{(\theta(\Delta t))}{2} [a_{t+\theta(\Delta t)} + a_t] \quad (8)$$

$$d_{t+\theta(\Delta t)} = d_t + (\theta(\Delta t)) v_t + \frac{(\theta(\Delta t))^2}{6} [a_{t+\theta(\Delta t)} + 2a_t] \quad (9)$$

Thay các công thức (5), (6) và (7) vào phương trình chuyển động cơ bản với $\tau = \theta(\Delta t)$, ta có:

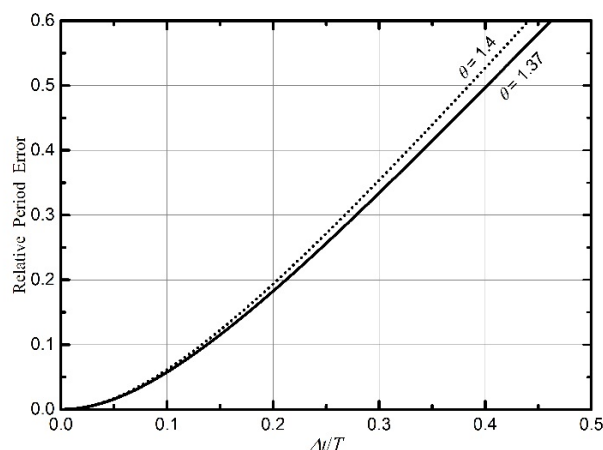
$$M a_{t+\theta(\Delta t)} + C v_{t+\theta(\Delta t)} + K d_{t+\theta(\Delta t)} = F_{t+\theta(\Delta t)} \quad (10)$$

Giải phương trình (10) với một ẩn duy nhất chưa biết là $a_{t+\theta(\Delta t)}$, sau đó thế vào công thức (8) và (9) ta thu được các giá trị chuyển vị, vận tốc, gia tốc ở thời điểm $t+\theta(\Delta t)$. Khảo sát phương pháp này, ta thu được khoảng tối ưu cho giá trị θ là $1,37 \leq \theta \leq 1,4$, trong khoảng giá trị này phương pháp này không có điều kiện ổn định. Lưu ý rằng, với $\theta = 1$, phương pháp này sẽ trở thành phương pháp Newmark tương ứng với trường hợp $\beta = 1/6$ và $\gamma = 1/2$, khi đó nó sẽ có điều kiện ổn định.

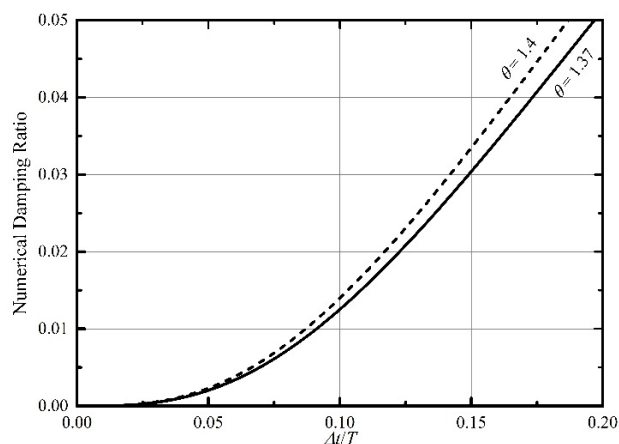
Sai số tương đối của chu kỳ, hệ số cản nhớt số ứng với các trường hợp $\theta = 1,37$ và $1,4$ được thể hiện trong hình 3. Sai số tương đối của chu kỳ của phương pháp Wilson Theta và hình 4, trong khi các tính chất của phương pháp được thể hiện trong bảng 2.

Bảng 2. Các giá trị tham số θ và các tính chất của phương pháp Wilson Theta

Giá trị θ	Kiểu	Điều kiện ổn định	Hệ số cản nhớt số
1,37	Nội ẩn thức	Không	Có
1,4	Nội ẩn thức	Không	Có
1,0 (*)	Nội ẩn thức	Có	Có
(*): Với $\theta = 1$, phương pháp này sẽ trở thành một trường hợp của phương pháp Newmark, liệt kê ở đây chỉ để tham khảo			



Hình 3. Sai số tương đối của chu kỳ của phương pháp Wilson Theta



Hình 4. Độ cản nhớt số của phương pháp Wilson Theta

3.3 Phương pháp collocation

Phương pháp *collocation* là sự kết hợp của hai phương pháp Newton và Wilson Theta với phương trình mô tả được viết như sau [12]:

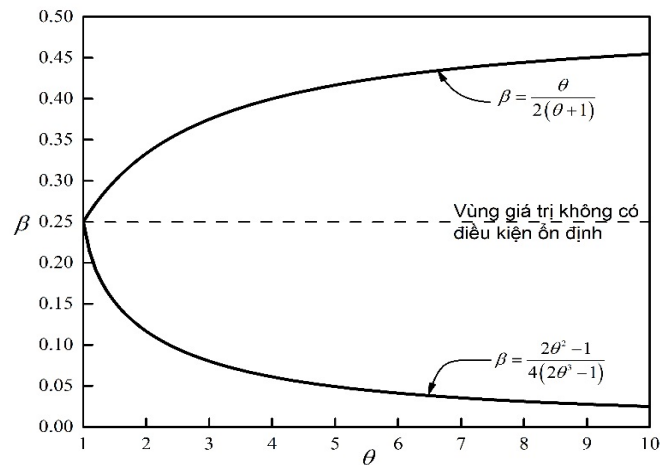
$$\begin{aligned} Ma_{i+\theta} + Cv_{i+\theta} + Kd_{i+\theta} &= F_{i+\theta} \\ a_{i+\theta} &= (1-\theta)a_i + \theta a_{i+1} \\ F_{i+\theta} &= (1-\theta)F_i + \theta F_{i+1} \\ d_{i+\theta} &= d_i + \theta(\Delta t)v_i + \frac{\theta^2(\Delta t)^2}{2}[(1-2\beta)a_i + 2\beta a_{i+\theta}] \\ v_{i+\theta} &= v_i + \theta(\Delta t)[(1-\gamma)a_i + \gamma a_{i+\theta}] \end{aligned} \quad (11)$$

Với $\theta = 1$, phương pháp này trở thành phương pháp Newmark, còn với $\beta = 1/6$ và $\gamma = 1/2$, phương pháp này trở thành phương pháp Wilson Theta. Điều kiện để phương pháp này có độ chính xác cấp hai là $\gamma = 1/2$. Để có độ chính xác trong kết quả lên đến cấp 3 thì cần thêm một điều kiện

nữa, đó là $\beta = \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\theta(\theta-1)$, tuy nhiên trong trường hợp này lại yêu cầu có điều kiện ổn định. Khoảng giá trị để phương pháp này thỏa mãn không có điều kiện ổn định và có độ chính xác cấp 2 là (xem hình 5):

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \theta \geq 1 \quad \frac{\theta}{2(\theta+1)} \geq \beta \geq \frac{2\theta^2-1}{4(2\theta^3-1)} \quad (12)$$

Các giá trị β và θ được lựa chọn lựa chọn theo điều kiện tối ưu hóa độ chính xác của kết quả và giá trị độ cản nhớt số, cách lựa chọn này thực hiện như sau: giá trị γ cố định bằng $1/2$ để phương pháp có độ chính xác cấp hai, tương ứng với mỗi giá trị β sẽ tìm lấy một giá trị θ sao cho sai số của kết quả là nhỏ nhất và độ cản nhớt số là lớn nhất. Một số cặp giá trị (β , γ , θ) được khuyến nghị lựa chọn trong bảng 3. Với các giá trị tham số khác có thể được lựa chọn bằng cách nội suy tuyến tính giữa các giá trị đã cho.



Hình 5. Vùng giá trị không có điều kiện ổn định của phương pháp collocation ($\gamma = 1/2$)

Bảng 3. Các cặp giá trị tham số khuyến nghị sử dụng cho phương pháp collocation

β	γ	θ	Kiểu	Hệ số cản nhót số	Ghi chú
$1/4$	0.25	1	Nội ẩn thức	Không	Trở thành phương pháp AAM
0.24	0.25	1,021712	Nội ẩn thức	Có	
0.22	0.25	1,077933	Nội ẩn thức	Có	
0.20	0.25	1,159772	Nội ẩn thức	Có	
0.18	0.25	1,287301	Nội ẩn thức	Có	
$1/6$	0.25	1,420815	Nội ẩn thức	Có	Trở thành phương pháp Wilson Theta

Nhìn chung, với những yêu cầu sử dụng thông thường thì phương pháp này không dễ sử dụng, việc lựa chọn các cặp giá trị tham số khó hơn so với các phương pháp khác, do đó không khuyến nghị lựa chọn phương pháp này trong tính toán. Bài báo cũng không trình bày kỹ hơn về phương pháp này, nếu bạn đọc quan tâm có thể tham khảo tài liệu [12, pp. 114-119].

3.4 Phương pháp Hilber – Hughes – Taylor (HHT)

Hilber, Hughes và Taylor đã đề xuất một phương pháp tính mới, trong đó đưa thêm vào hệ số α để điều chỉnh hệ số cản nhót số tính toán, điều mà họ phương pháp Newmark không làm được [4]. Phương pháp này được viết như sau:

$$\begin{aligned}
 M_{i+1} + (1 + \alpha)Cv_{i+1} - \alpha C v_i + (1 + \alpha)Kd_{i+1} - \alpha K d_i &= (1 + \alpha)F_{i+1} - \alpha F_i \\
 d_{i+1} &= d_i + (\Delta t)v_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\beta)a_i + 2\beta a_{i+1} \right] \\
 v_{i+1} &= v_i + (\Delta t) \left[(1 - \gamma)a_i + \gamma a_{i+1} \right]
 \end{aligned} \tag{13}$$

Giá trị α khuyến nghị nằm trong khoảng $[-1/3, 0]$, trong đó với $\alpha = 0$ thì phương pháp này trở thành phương pháp AAM (thuộc họ phương pháp Newmark). Các giá trị β, γ được lựa chọn căn cứ theo α như sau:

$$\gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2} \quad \beta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4} \tag{14}$$

Giá trị α càng giảm thì hệ số cản nhót số càng tăng. Với trường hợp $\alpha = 0$, nó không có hệ số

cần nhót số, tương tự như với phương pháp AAM.

Phương pháp này được chọn là phương pháp tính mặc định trong SAP2000 với hệ số mặc định $\alpha = 0$, $\beta = 0,25$ và $\gamma = 0,5$. Trong

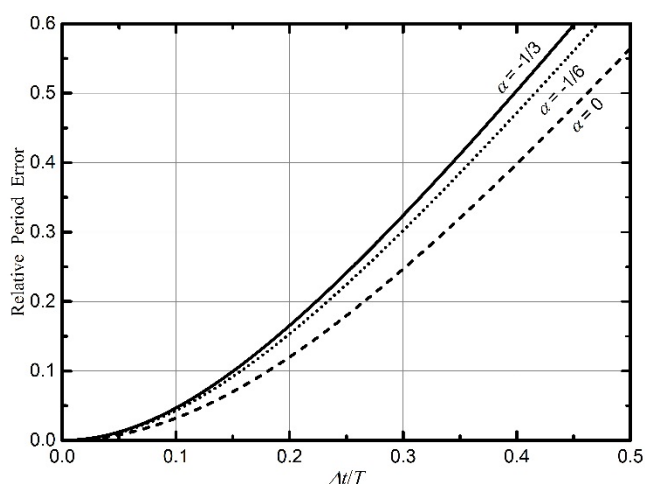
trường hợp này, đây chính là phương pháp AAM như đã nói ở mục 0. Một số cặp giá trị α , β , γ và các tính chất của chúng được trình bày như trong bảng 4 để thuận tiện cho người sử dụng.

Bảng 4. Các giá trị thông số đầu vào thông dụng cho phương pháp HHT

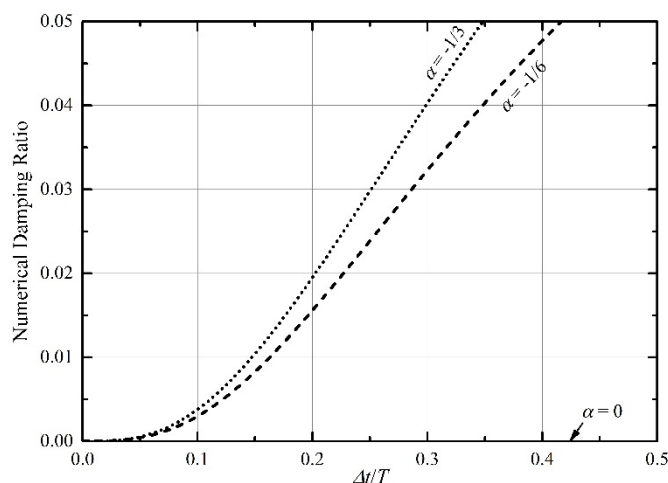
Giá trị α	Kiểu	β	γ	Điều kiện ổn định	Hệ số cần nhót số
-1/3	Nội ẩn thức	0,444	0,833	Không	Có
-1/6	Nội ẩn thức	0,340	0,667	Không	Có
0	Nội ẩn thức	0,25	0,5	Không	Không

Ghi chú: Trong SAP2000, người dùng chỉ cần nhập giá trị α , giá trị β , γ sẽ do chương trình tự động tính toán.

Sai số tương đối của chu kỳ, hệ số cần nhót số ứng với các trường hợp α khác nhau được thể hiện trong hình 6 và hình 7. Ta thấy rằng, muốn có được hệ số cần nhót số thì ta phải giảm độ chính xác, độ cần nhót số càng tăng thì độ chính xác trong kết quả giảm xuống.



Hình 6. Sai số tương đối của chu kỳ của phương pháp HHT



Hình 7. Hệ số cần nhót số của phương pháp HHT

3.5 Phương pháp Chung&Hulbert

Phương pháp Chung & Hulbert [13], đôi khi còn được gọi là phương pháp hệ số α (α -method), là phương pháp tổng quát bao hàm cả phương pháp Newmark và HHT, được viết như sau:

$$(1-\alpha_m)Ma_{i+1} + \alpha_m Ma_i + (1-\alpha)Cv_{i+1} + \alpha Cv_i + (1-\alpha)Kd_{i+1} + \alpha Kd_i = (1-\alpha)F_{i+1} + \alpha F_i$$

$$d_{i+1} = d_i + (\Delta t)v_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}[(1-2\beta)a_i + 2\beta a_{i+1}] \quad (15)$$

$$v_{i+1} = v_i + (\Delta t)[(1-\gamma)a_i + \gamma a_{i+1}]$$

Hai giá trị α_m , α , β và γ được xác định dựa vào điều kiện ổn định, độ chính xác và sai số của kết quả tính. Để thấy rằng, với $\alpha_m = 0$, phương pháp này sẽ trở thành phương pháp HHT, và với cả $\alpha_m = 0$ và $\alpha = 0$, phương pháp này trở thành phương pháp Newmark. Để phương pháp này không có điều kiện ổn định, các giá trị α_m , α , β và γ được kiến nghị lựa chọn như sau:

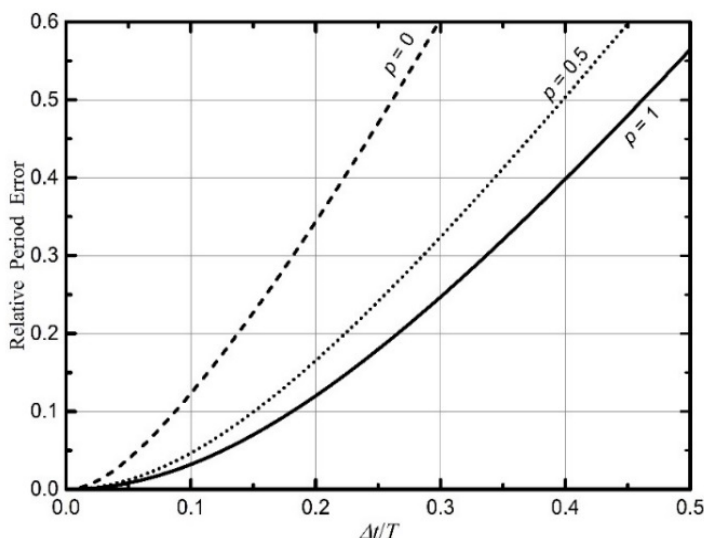
$$\alpha_m = \frac{2p-1}{p+1} \quad \alpha = \frac{p}{p+1} \quad \beta = \frac{1}{(p+1)^2} \quad \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{3-p}{p+1} \right) \quad (16)$$

Giá trị p nằm trong khoảng $[0, 1]$. Với $p = 1$, phương pháp này không có hệ số cản nhớt số (trở thành phương pháp Newmark), p càng nhỏ sẽ cho hệ số cản nhớt số càng tăng, $p = 0,5$ sẽ trở thành phương pháp HHT tương ứng với $\alpha = -1/3$.

Một số trường hợp tính của phương pháp Chung&Hulbert được thể hiện trong, sai số tương đối của chu kỳ và hệ số cản nhớt số được thể hiện trong hình 8 và hình 9.

Bảng 5. Giá trị đầu vào của một số trường hợp tính của phương pháp Chung&Hulbert

Giá trị p	Kiểu	α_m	α	β	γ	Điều kiện ổn định	Hệ số cản nhớt số
1	Nội ẩn thức	0,5	0,5	0,25	0,5	Không	Không
0,5	Nội ẩn thức	0	1/3	0,444	0,833	Không	Có
0	Nội ẩn thức	-1,0	0	1,0	1,5	Không	Có



Hình 8. Sai số tương đối của chu kỳ của phương pháp Chung&Hulbert

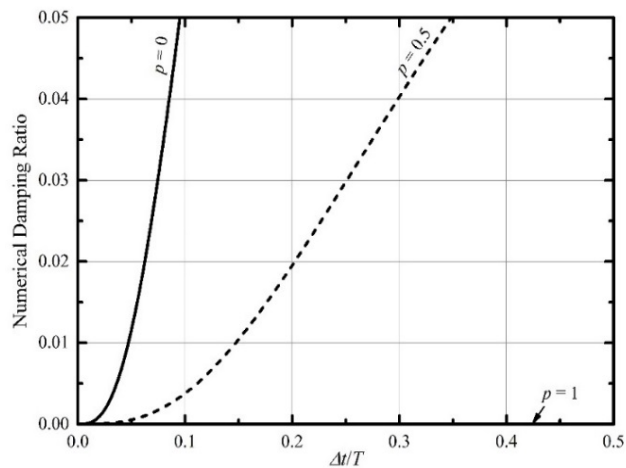


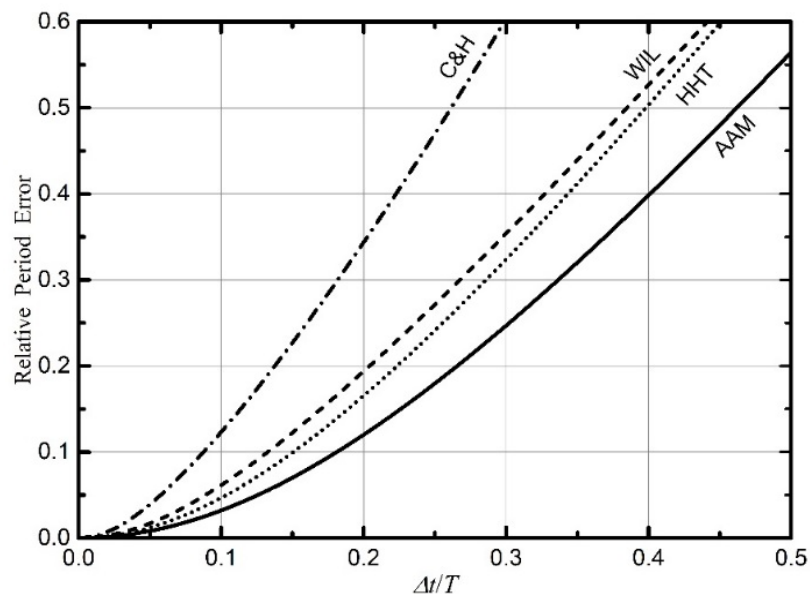
Figure 4. Variation of numerical damping ratio with $\Delta t/T$ for different p value

Hình 9. Hệ số cản nhớt số của phương pháp Chung&Hulbert

4. Lựa chọn các phương pháp tính

Để dễ hình dung và so sánh các phương pháp tính, từ đó lựa chọn một phương pháp tính thích hợp, sai số tương đối của chu kỳ và độ cản nhớt số của các phương pháp được in chung trong hình 10 và hình 11. Các phương pháp được lựa chọn so sánh được ký hiệu như sau:

- AAM: phương pháp Newmark với $\beta = 0,25$, $\gamma = 0,5$;
- HHT: phương pháp Hilber – Hughes – Taylor với $\alpha = -1/3$;
- WIL: phương pháp Wilson Theta với $\theta = 1,4$;
- C&H: phương pháp Chung&Hulbert với $p = 0$.



Hình 10. So sánh độ sai số tương đối của chu kỳ giữa các phương pháp tính

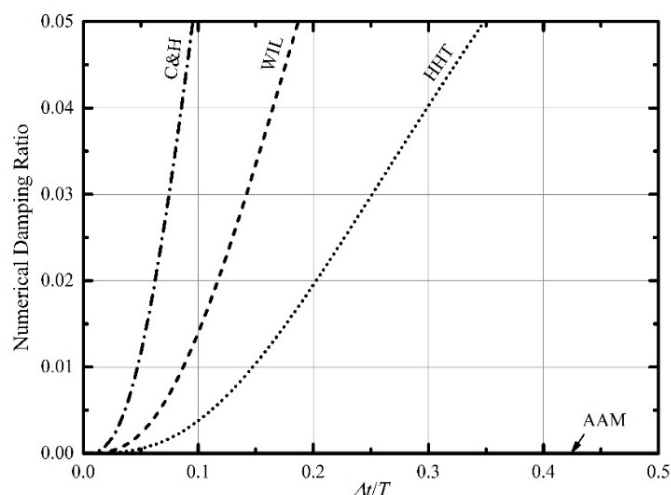


Figure 4. Variation of numerical damping ratio with $\Delta t/T$ for different p value

Hình 11. So sánh hệ số cản nhớt số giữa các phương pháp tính

Từ hình 10 và hình 11, ta có thể đưa ra một số kết luận sau:

- Sai số của phương pháp C&H là cao nhất, do vậy phương pháp này thường không được lựa chọn để tính toán. Với phương pháp Chung&Hulbert, khoảng giá trị $0 \leq p < 0,5$ thường ít được lựa chọn do sai số lớn.

- Độ chính xác của phương pháp AAM là cao nhất, do vậy trong những trường hợp tính không yêu cầu có độ cản nhớt số, phương pháp này thường được lựa chọn để tính toán. Để dễ nhớ, có thể chọn phương pháp HHT và gán hệ số $\alpha = 0$, trường hợp này phương pháp HHT sẽ tương ứng với phương pháp AAM. Đây chính là trường hợp tính mặc định của SAP2000.

- Trong trường hợp cần có độ cản nhớt số, nên sử dụng phương pháp HHT ứng với $\alpha < 0$ do dễ nhớ (chỉ cần nhập một giá trị α , SAP2000 sẽ tự tính với các giá trị β , γ còn lại).

- Khi tính toán với hệ kết cấu phức tạp, có nhiều bậc tự do và có tính phi tuyến cao, nên chọn phương pháp HHT với hệ số $\alpha < 0$ (ví dụ: $\alpha = -0,1$, $-0,2$ hoặc $-0,33$), vì việc loại bỏ ảnh hưởng của các dạng dao động có tần số cao sẽ làm tăng khả năng hội tụ của kết quả tính toán khi chương trình dùng thuật toán tính lặp.

5. Kết luận

Bài báo (phần 1) đã tóm lược một số đặc điểm của các phương pháp phân tích phi tuyến theo lịch sử thời gian trong SAP2000. Với mỗi phương pháp, có thể đánh giá tính chất của nó qua các tính chất như: nội ẩn thức hay ngoại hiển thức, điều kiện ổn định, độ chính xác trong kết quả tính, hệ số cản nhớt số. Bài báo đã đưa ra những trường hợp tính toán cơ bản nhất với mỗi phương pháp làm cơ sở để sử dụng tính toán với SAP2000. Trong các phương pháp được thiết lập sẵn trong SAP2000, phương pháp Chung&Hulbert có thể bao quát gần như đủ hết các trường hợp còn lại (trừ phương pháp Wilson Theta). Tuy nhiên, phương pháp nên lựa chọn sử dụng là phương pháp HHT do các tính chất của nó được kiểm soát duy nhất với một thông số. Tất cả các trường hợp tính với các phương pháp đều thuộc họ nội ẩn thức, duy nhất một trường hợp tính của phương pháp Newmark thuộc họ ngoại hiển thức, nhưng phương pháp này không được khuyến nghị sử dụng do có điều kiện ổn định, chỉ dùng để so sánh kết quả hoặc để giải các bài toán dạng truyền sóng, dạng này ít gặp trong xây dựng.

Phần 2 tiếp theo của bài báo sẽ giới thiệu một số ví dụ tính toán để làm rõ các tính chất của phương pháp này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Hồng Hải (2015), “Nghiên cứu sự làm việc của nhà cao tầng bê tông cốt thép có tầng cứng chịu tác động của động đất ở Việt Nam”, *Viện Khoa học Công nghệ Xây dựng*, Hà Nội, 2015.
- [2] TCVN9386:2012, “*Thiết kế công trình chịu động đất*”, Bộ Khoa học Công nghệ, Hà Nội, 2012.
- [3] I. Computers and Structures, “SAP2000 Watch and Learn,” [Trực tuyến]. Available: <http://www.csiamerica.com/products/sap2000/watch-and-learn>. [Đã truy cập 11/2016].
- [4] Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L., “Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, tập 5, pp. 283-292, 1977.
- [5] X. Zhou và K. Tamma, “Algorithms by design with illustrations to solid and structural mechanics/dynamics,” *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, tập 66, pp. 1738-1790, 2006.
- [6] Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, “Finite Elements in Dynamics and Vibrations,” trong *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Madison, Wisconsin, John Wiley & Sons, 1988, p. 396.
- [7] T. Belytschko, “An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures,” trong *Computational Methods for Transient Analysis*, North Holland, Elsevier Science Publisher B.V, 1983, p. 55.
- [8] R. D. Cook, D. S. Malkus và M. E. Plesha, Concepts and applications of finite element analysis, Madison, Wisconsin: John Wiley & Son, 1988.
- [9] T. J. Hughes, The Finite Element Method, Toronto, Canada: General Publishing Company Ltd., 1987.
- [10] Newmark, N.M., “A method of computation for structural dynamics,” *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, tập 85, pp. 67-94, 1959.
- [11] Bathe, K.J. and Wilson, E.L., “Stability and accuracy analysis of direct integration methods,” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol.1*, pp. 283-291, 1973.
- [12] Belytschko, T. and Hughes, T.J.R., Computational methods for transient analysis., North-Holland, 1983.
- [13] J. Chung and G.M. Hulbert., “A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method,” *Journal of Applied Mechanics*, pp. 60:371-375, 1993.

Ngày nhận bài: 21/11/2015.

Ngày nhận bài sửa lần cuối: 01/01/2016.