

TÍNH TOÁN ỔN ĐỊNH PHI TUYẾN HÌNH HỌC KẾT CẤU DÀN VÒM PHẪNG TÍNH ĐỊNH TRONG VÀ SIÊU TÍNH NGOÀI

ThS. **PHẠM VĂN ĐẠT**

Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

Tóm tắt: Bài báo trình bày phương pháp phân tích ổn định cho dàn vòm phẳng tính định trong siêu tĩnh ngoài có kể đến tính phi tuyến hình học của dàn vòm phẳng dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss. Kết quả phân tích ổn định phi tuyến hình học này được so sánh với kết quả phân tích tuyến tính để thấy được sự ảnh hưởng của tính phi tuyến hình học đến giá trị tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn.

Từ khóa: dàn, phi tuyến hình học, phân tích ổn định.

1. Đặt vấn đề

Tính toán ổn định cho kết cấu nằm trong các yêu cầu đối với tính toán thiết kế các kết cấu nói chung và tính toán kết cấu dàn nói riêng. Dưới tác dụng của tải trọng tại các nút dàn, các thanh dàn chịu nén có thể mất ổn định cục bộ và làm cho kết cấu dàn bị phá hỏng. Hiện nay khi phân tích tính toán ổn định cục bộ cho kết cấu dàn [7,14,15,16] thường phải coi góc của các thanh dàn trước và sau khi dàn bị biến dạng là không đổi (phân tích ổn định tuyến tính) và chưa có một phương pháp hiệu quả nào để phân tích tính toán ổn định cục bộ của các thanh dàn khi kể đến sự thay đổi góc của các trục thanh trước và sau khi dàn biến dạng (phân tích ổn định phi tuyến hình học). Ảnh hưởng của phi tuyến hình học này có thể làm thay đổi giá trị tải trọng tới hạn của kết cấu dàn. Vì vậy, trong bài báo này tác giả sẽ trình bày phương pháp phân tích tính toán ổn định cục bộ phi tuyến hình học kết

cấu dàn và khảo sát một số ví dụ phân tích ổn định phi tuyến hình học kết cấu dàn vòm phẳng chịu tải trọng thẳng đứng tại các nút dàn. Phương pháp phân tích ổn định dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss.

2. Phương pháp phân tích ổn định cục bộ phi tuyến hình học của kết cấu dàn dựa trên phương pháp nguyên lý cực trị Gauss

Kết cấu dàn ổn định cục bộ khi nội lực trong các thanh dàn không vượt quá lực tới hạn của thanh dàn đó tính theo Euler. Từ đó tác giả đề xuất một phương pháp giải bài toán ổn định cục bộ của kết cấu dàn phi tuyến hình học là: Lực tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn là lực lớn nhất có thể tác dụng lên kết cấu mà nội lực trong các thanh phải thỏa mãn hai điều kiện:

- Lượng ràng buộc Z của kết cấu dàn tính theo công thức của tài liệu [3] đạt cực trị.
- Nội lực trong tất cả các thanh trong dàn không được vượt quá lực tới hạn của thanh dàn đó tính theo Euler.

Phương pháp trên là phương pháp của riêng tác giả. Sau đây tác giả xin được trình bày chi tiết phương pháp xác định tải trọng tới hạn lên kết cấu dàn phi tuyến hình học.

Xét kết cấu dàn gồm n thanh và m nút, gọi lực tác dụng lên nút r theo các phương là P_{xr} , P_{yr} , P_{zr} ; trước khi mất ổn định thì các thanh dàn phải thỏa mãn điều kiện:

$$Z = \sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_{xr} \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_{yr} \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_{zr} \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k \right) \rightarrow \min \quad (1)$$

hay:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_{xr} \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_{yr} \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_{zr} \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k \right) \right) = 0 \quad (j = 1 \div m) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v_j} = \frac{\partial}{\partial v_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_{xr} \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_{yr} \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_{zr} \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k \right) \right) = 0 \quad (j = 1 \div m) \quad (1b)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_{xr} \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_{yr} \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_{zr} \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta l_k \right) \right) = 0 \quad (j = 1 \div m) \quad (1c)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial N_i} = \frac{\partial}{\partial N_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 \quad (i = 1 \div n) \quad (1d)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 \quad (i = 1 \div n) \quad (1e)$$

trong đó: $I_k^{(0)}$, ΔI_k là chiều dài trước khi biến dạng và độ biến dạng dài tuyệt đối của thanh. Nếu gọi i, j là hai nút 2 tại hai đầu thanh k , thì $I_k^{(0)}$ và ΔI_k được tính như sau:

- Chiều dài thanh trước biến dạng:

$$I_k^{(0)} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2)$$

- Biến dạng dài tuyệt đối của thanh:

+ Khi phân tích tuyến tính:

$$\Delta I_k = \left((x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) + (z_j - z_i)(w_j - w_i) \right) / I_k^{(0)} \quad (3)$$

+ Khi phân tích phi tuyến hình học (kể đến sự thay đổi góc của trục thanh dàn trong quá trình dàn biến dạng):

$$\Delta I_k = \sqrt{(x_j + u_j - x_i - u_i)^2 + (y_j + v_j - y_i - v_i)^2 + (z_j + w_j - z_i - w_i)^2} - I_k^{(0)} \quad (4)$$

Trong công thức (2), (3), (4): (x_i, y_i, z_i) , (x_j, y_j, z_j) lần lượt là tọa độ của nút i, j trước khi dàn biến dạng; (u_i, v_i, w_i) , (u_j, v_j, w_j) : lần lượt là các thành phần chuyển vị của nút i, j khi dàn biến dạng.

Điều kiện để kết cấu dàn thỏa mãn điều kiện ổn định cục bộ là nội lực trong các thanh không được vượt quá lực tới hạn đầu tiên của từng thanh và có thể được viết như sau:

$$N_k \geq -9,8698 E^k J_{\min}^k / (I_k)^2 \quad (k = 1 \div n) \quad (5a)$$

$$\text{hay: } -N_k - 9,8698 E^k J_{\min}^k / (I_k^{(0)})^2 \leq 0 \quad (k = 1 \div n) \quad (5b)$$

Tải trọng tác dụng tới hạn là tải trọng tác dụng lớn

nhất lên kết cấu dàn mà nội lực trong các thanh vẫn đảm bảo điều kiện cân bằng (1) và điều kiện ổn định cục bộ (5).

Như vậy, từ bài toán ổn định của kết cấu dàn đưa về bài toán quy hoạch toán học phi tuyến thuần túy với hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc như sau:

- Hàm mục tiêu: $f = P \rightarrow \max$ nhưng để thuận tiện cho việc giải tác giả viết hàm mục tiêu dưới dạng:

$$f = -P \rightarrow \min \quad (6)$$

- Điều kiện ràng buộc: là các đẳng thức từ điều kiện (1) và các bất đẳng thức từ điều kiện (5):

$$\text{ceq}_{(i)} = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 (i = 1 \div m)$$

$$\text{ceq}_{(i+m)} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 (i = 1 \div m)$$

$$\text{ceq}_{(2m+i)} = \frac{\partial}{\partial w_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 (i = 1 \div m)$$

$$\text{ceq}_{(3m+i)} = \frac{\partial}{\partial N_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 (i = 1 \div n)$$

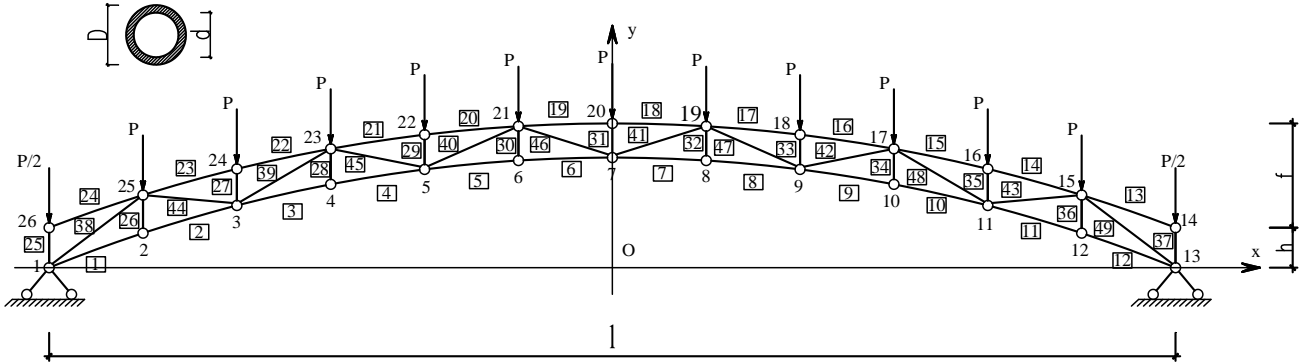
$$\text{ceq}_{(3m+n+i)} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(N_k)^2 I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot u_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot v_r - \sum_{r=1}^m 2P_r \cdot w_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k F_k} - \Delta I_k \right) \right) = 0 (i = 1 \div n)$$

$$c_{(k)} = -N_k - 9,8698E^k J_{\min}^k / (l_k^{(0)})^2 \leq 0 (k = 1 \div n)$$

Nghiệm của bài toán quy hoạch phi tuyến này là giá trị tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn.

3. Phân tích ổn định phi tuyến hình học kết cấu dàn vòm tĩnh định trong và siêu tĩnh ngoài

Xác định tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài chịu tải trọng như hình 1, biết các thanh có tiết diện hình vành khuyên: $D=20\text{cm}$, $d=18\text{cm}$; $E=2.10^4(\text{kN}/\text{cm}^2)$; $l=4800(\text{cm})$, $h=80(\text{cm})$ và $k = \frac{f}{l} = \frac{1}{3}$.



Hình 1. Dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài

Lời giải:

Bài toán có 49 ẩn số là nội lực trong các thanh dàn: $N_i \quad (i = 1 \div 49)$

Điều kiện biên của bài toán là chuyển vị tại nút 1 và nút 13 theo các phương x và phương y bằng không nên: $u_1 = v_1 = u_{13} = v_{13} = 0$.

Như vậy, bài toán ngoài 49 ẩn số là nội lực còn có 48 ẩn số là chuyển vị tại của các nút dàn:

$$[cv] = \begin{bmatrix} u_2; u_3; u_4; u_5; u_6; u_7; u_8; u_9; u_{10}; u_{11}; u_{12}; u_{14}; u_{15}; u_{16}; u_{17}; u_{18}; u_{19}; u_{20}; u_{21}; u_{22}; u_{23}; u_{24}; u_{25}; u_{26}; v_2; \\ v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{14}; v_{15}; v_{16}; v_{17}; v_{18}; v_{19}; v_{20}; v_{21}; v_{22}; v_{23}; v_{24}; v_{25}; v_{26} \end{bmatrix}$$

Phiếm hàm lượng ràng buộc mở rộng (1) của của bài toán có thể được viết như sau:

$$L = \sum_{k=1}^{49} \frac{(N_k)^2 \cdot l_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{r=15}^{25} 2P_{yr} \cdot v_r - P(v_{14} + v_{26}) + \sum_{k=1}^{49} \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot (l_k^{(0)})}{E_k A_k} - \Delta l_k \right) \rightarrow \min \quad (7)$$

Bài toán tính toán ổn định kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài được đưa về bài toán quy hoạch toán học như sau:

- Hàm mục tiêu: $\min(f) = \min(-P)$ (8)

- Các điều kiện ràng buộc phi tuyến bao gồm:

+ 146 ràng buộc là các đẳng thức

$$ceq_{(i)} = \frac{\partial L}{\partial N_i} = \frac{\partial}{\partial N_i} \left(\sum_{k=1}^{49} \frac{(N_k)^2 \cdot l_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{r=14}^{26} 2P_{yr} \cdot v_r + \sum_{k=1}^{49} \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot (l_k^{(0)})}{E_k A_k} - \Delta l_k \right) \right) = 0 \quad (i = 1 \div 49) \quad (9a)$$

$$ceq_{(i+49)} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\sum_{k=1}^{49} \frac{(N_k)^2 \cdot l_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{r=14}^{26} 2P_{yr} \cdot v_r + \sum_{k=1}^{49} \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot (l_k^{(0)})}{E_k A_k} - \Delta l_k \right) \right) = 0 \quad (i = 1 \div 48) \quad (9b)$$

$$ceq_{(i+97)} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\sum_{k=1}^{49} \frac{(N_k)^2 \cdot I_k^{(0)}}{E_k A_k} - \sum_{r=14}^{26} 2P_{yr} \cdot v_r + \sum_{k=1}^{49} \lambda_k \cdot \left(\frac{N_k \cdot I_k^{(0)}}{E_k A_k} - \Delta l_k \right) \right) = 0 \quad (i = 1 \div 49) \quad (9c)$$

+ 49 ràng buộc là các bất đẳng thức

$$N_k \geq - \frac{0,98698 \cdot E_k \cdot I_k}{(I_k^{(0)})^2} \quad (k = 1 \div 49)$$

hay: $c_{(k)} = -N_k - \frac{0,98698 \cdot E_k \cdot I_k}{(I_k^{(0)})^2} \leq 0 \quad (k = 1 \div 49) \quad (10)$

Giải bài toán quy hoạch toán học phi tuyến này sẽ tìm được giá trị lực tới hạn lên kết cấu. Có rất nhiều cách giải bài toán quy hoạch phi tuyến này, trong nội dung bài báo này tác giả không trình bày cách giải và xin phép sẽ trình bày cách giải trong một bài báo khác.

Kết quả tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài khi phân tích phi tuyến hình học: $P_{th} = 111,220(kN)$; Kết quả phân tích tải trọng tới hạn tác dụng lên kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài khi phân tích tuyến tính: $P_{th} = 150,154(kN)$. Khi tải trọng đạt đến tải trọng tới hạn theo cả hai cách phân tích đều là thời điểm nội lực các thanh 1 và thanh 12 đạt đến tải trọng tới hạn của các thanh này. Như vậy, khi tính toán kể đến sự thay đổi góc trục thanh thì tải trọng tới

hạn tác dụng lên kết cấu dàn tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài giảm đi 25,929% và không có sự thay đổi vị trí thanh mất ổn định giữa hai phân tích. Ngoài ra, khi tải trọng tác dụng đạt đến tải trọng tới hạn thì các phương trình cân bằng (9) và các bất đẳng thức (10) đều thỏa mãn.

4. Ảnh hưởng độ thoải của dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài đến giá trị tải trọng tới hạn tác dụng lên dàn vòm

Để nghiên cứu ảnh hưởng độ thoải của dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài đến giá trị tải trọng tới hạn của dàn vòm và độ sai khác giữa kết quả giá trị tải trọng tới hạn giữa phân tích tuyến tính và phân tích phi tuyến hình học. Tác giả tiến hành phân tích dàn vòm như trong mục 3 nhưng với các độ thoải khác nhau ($k = \frac{1}{8}; k = \frac{1}{6}; k = \frac{1}{4}$). Sau khi phân tích kết quả được lập trong bảng 1.

Bảng 1. Kết quả phân tích ổn định dàn vòm tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài với các giá trị k khác nhau

Phương pháp phân tích	Tải trọng tới hạn		
	k=1/4	k=1/6	k=1/8
PTTT	257,417(kN)	322,978 (kN)	304,877 (kN)
PTPTHH	204,154(kN)	267,907 (kN)	255,520 (kN)
PTCL	20,691(%)	17,051(%)	16,189(%)

Theo kết quả tính toán cho thấy khi độ thoải của dàn vòm phẳng tĩnh định trong, siêu tĩnh ngoài càng lớn thì phần trăm chênh lệch tải trọng tới hạn giữa phân tích tuyến tính và phân tích phi tuyến hình học càng lớn. Giá trị tải trọng tới hạn lớn nhất khi $k = \frac{1}{6}$.

Ngoài ra, với các độ thoải khác nhau thì giữa hai cách phân tích vị trí mất ổn định đều xảy ra tại thanh 1 và thanh 12.

5. Kết luận

Qua các kết quả nghiên cứu đã trình bày, có thể đưa ra các kết luận sau đây:

- Dựa theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss xây dựng được phương pháp xác định tải trọng tới hạn cho kết cấu dàn vòm phẳng tĩnh định trong siêu

tĩnh ngoài chịu tải trọng tập trung tại các nút dàn khi có kể đến sự thay đổi góc của các trục thanh trong quá trình kết cấu dàn biến dạng. Kết quả tính toán đảm bảo độ tin cậy;

- Khi độ thoải của dàn vòm phẳng tĩnh định trong siêu tĩnh ngoài trong ví dụ khảo sát càng lớn thì phần trăm chênh lệch của tải trọng tới hạn giữa phân tích có kể đến sự thay đổi góc của các trục thanh trong quá trình kết cấu dàn biến dạng và phân tích tuyến tính càng lớn;

- Khi phân tích tuyến tính hay phân tích phi tuyến hình học đối với dàn vòm phẳng tĩnh định trong siêu tĩnh ngoài trong ví dụ khảo sát thì vị trí mất ổn định của kết cấu dàn vẫn không thay đổi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. HÀ HUY CƯƠNG (2005), Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, *Tạp chí Khoa học và kỹ thuật*, IV/2005, Tr. 112 ÷ 118.
2. ĐOÀN VĂN DUẤN (2011), Nghiên cứu ổn định đàn hồi của kết cấu hệ thanh có xét đến biến dạng trượt, *Luận án Tiến sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội*.
3. PHẠM VĂN ĐẠT (2013), Phân tích phi tuyến dàn phẳng dựa trên nguyên lý cực trị Gauss, *Tạp chí xây dựng số 07/2013 (Tr76-78)*.
4. TRẦN THỊ KIM HUẾ (2005), Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss đối với các bài toán cơ học kết cấu, *Luận văn Thạc sĩ kỹ thuật, Đại học Kiến trúc Hà Nội*.
5. VŨ ĐÌNH LAI, NGUYỄN XUÂN LỰU, BÙI ĐÌNH NGHI (2002), Sức bền vật liệu, *Nhà xuất bản Giao thông vận tải*.
6. NGUYỄN VĂN LIÊN, ĐÌNH TRỌNG BẰNG, NGUYỄN PHƯƠNG THÀNH (2003), Sức bền vật liệu, *Nhà xuất bản Xây dựng*.
7. LÊU THỌ TRÌNH, ĐỖ VĂN BÌNH (2008), Ổn định công trình, *Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật*.
8. CARLOS A.FELIPPA (2001), Nonlinear finite element methods, *University of Colorado*.
9. TH.VON. KANRMAN, H.S.TSIEN (1939), The buckling of Spherical shells by External Pressure, *J.Aero.Sci*,7:43-50.
10. TUGRUL TALASLIOGLU (2013), Global stability-based design optimization of truss structures using multiple objectives, *Sadhana Vol. 38, Part 1, February 2013, pp. 37-68*.
11. S.E.KIM (1998), Direct design of truss bridges using advanced analysis, *Structural Engineering and Mechanics*.
12. S.P.TIMOSHENKO, J.M.GERE (1985), Theory of elastic stability, *McGRAW-HILL International Editions*.
13. XING JI-HUI, PHAM VAN-DAT, YANG QING-SHAN (2008), Failure Modes of Single-layer Latticed Domes Supported by Braced Frames Subjected to Harmonic Waves, *China Urban Science Edition, p.1-5*.
14. А. А. БИТЮРИН (2011), Лекции по устойчивости стержневых систем, *Оформление. УЛГТУ*.
15. А. С. ВОЛЬМИР (1967), Устойчивость деформируемых систем, *Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы*.

Ngày nhận bài: 23/11/2014.

Ngày nhận bài sửa lần cuối: 27/12/2014.