

# PHÂN TÍCH ỨNG XỬ ĐỘNG LỰC HỌC KẾT CẤU ĐƯỜNG SẮT KHÔNG BALLAST QUA MÔ HÌNH 1 VÀ 2 BẬC TỰ DO

ThS. **NGUYỄN XUÂN ĐẠI**  
Học viện Kỹ thuật quân sự

*Tóm tắt: Nghiên cứu ứng xử động lực học của hệ kết cấu đường sắt dưới tác dụng của tải trọng tàu có vai trò quan trọng trong việc thiết kế xây dựng kết cấu đường sắt. Roger và Bernard Sonnevile đã phát triển hệ kết cấu LVT (Low Vibration Track) cho tuyến đường sắt chạy trong hầm, được xem là giải pháp hiệu quả cho tất cả các loại đường sắt không có nền đá ballast và áp dụng tốt trong lĩnh vực xây dựng tàu điện ngầm. Hệ thống này đã được ứng dụng rộng rãi trên thế giới. Trong bài báo này, tác giả vận dụng và nghiên cứu phương pháp mô hình hóa hệ kết cấu LVT dưới tác dụng của tải trọng tàu chạy nhằm phân tích ứng xử động lực học của kết cấu và nghiên cứu ảnh hưởng của vận tốc, tải trọng tàu đến dao động của hệ.*

## 1. Đặt vấn đề

Công tác thiết kế, xây dựng đường sắt có lịch sử lâu đời và đã có những phát triển đáng kể. Hiện nay, các tuyến đường sắt đã được xây dựng chủ yếu vẫn là hệ thống đường sắt đặt trên nền đá ballast (đường

sắt ballast). Kết cấu đường sắt ballast có nhiều hạn chế về độ ổn định hình học và động lực học. Sự thay đổi thành phần cấu trúc và hình dạng lớp nền đá trong quá trình sử dụng làm ảnh hưởng đến quá trình khai thác và sử dụng công trình.

Sự phát triển của khoa học kỹ thuật làm cho tốc độ của tàu ngày càng tăng, vấn đề dao động và ổn định của kết cấu đường sắt do đó ngày càng quan trọng. Việc nghiên cứu và ứng dụng dạng kết cấu mới để đảm bảo đáp ứng sự phát triển của công nghệ xây dựng, của các phương tiện và vận tốc tàu chạy là việc làm cần thiết.

Hiện nay, trên thế giới đã tiến hành xây dựng các tuyến đường sắt đô thị bằng cách sử dụng kết cấu nền bê tông thay thế cho lớp nền đá ballast (đường sắt không ballast - hình 1). Hệ thống giảm dao động cho hệ kết cấu này được thiết kế bằng các lớp đệm đàn nhớt.



Hình 1. Đường ray không ballast



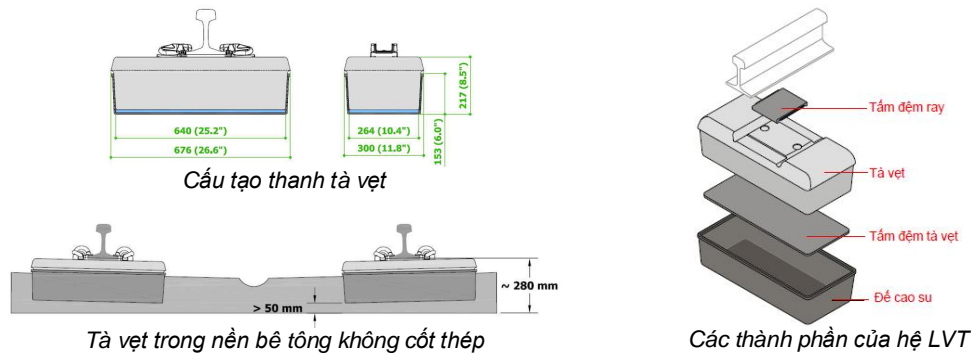
Hệ thống kết cấu này cho phép việc xây dựng các tuyến đường sắt có độ chính xác cao về kích thước hình học, độ ổn định trong quá trình lắp đặt và khai thác sử dụng, đồng thời đảm bảo khả năng hạn chế được dao động của kết cấu.

Mục tiêu của bài báo: Nghiên cứu mô hình hóa hệ động lực học của kết cấu đường sắt không ballast, đưa ra một số mô hình tính đơn giản và nghiên cứu

ảnh hưởng của vận tốc, tải trọng của phương tiện đến chuyển vị và lực tương tác trong hệ.

## 2. Cấu tạo hệ kết cấu đường sắt không ballast

Hệ kết cấu đường sắt không ballast, hay còn gọi là hệ “Low Vibration Track” (LVT) [5], được thiết kế gồm: thanh ray, hệ đệm và kẹp ray, thanh tà vẹt, tấm đệm đàn nhớt dưới tà vẹt, đế cao su và nền bê tông (hình 2).



**Hình 2. Kết cấu đường sắt không ballast**

Thanh ray được giữ bởi hệ kẹp ray và đệm ray, thanh tà vẹt cấu tạo bằng khối bê tông độc lập, được lắp đặt tạo góc nghiêng bằng 1/20 đối với ray. Lớp đá ballast và tác dụng giảm chấn của nó được thay thế bởi 1 lớp đệm đàn nhớt đặt phía dưới thanh tà vẹt và 1 đế cao su, đế cao su được chế tạo để bảo vệ toàn bộ hệ phía trên (tà vẹt, đệm đàn nhớt). Toàn bộ hệ kết cấu được đặt trong nền bê tông không cốt thép.

Trong hệ thống này, thanh tà vẹt là 2 khối kết cấu độc lập, tác dụng giảm dao động của kết cấu được thực hiện thông qua thanh tà vẹt và 2 lớp vật liệu đàn nhớt là đệm đàn nhớt dưới tà vẹt và đế cao su cho phép điều chỉnh được dao động trong các miền tần số khác nhau.

### 3. Nguyên lý làm việc và mô hình tính toán

#### 3.1 Nguyên lý làm việc của hệ Low Vibration Track

Cấu tạo hệ kết cấu từ trên xuống gồm: Thanh ray, hệ kẹp và đệm ray, thanh tà vẹt, lớp đệm đàn nhớt, lớp đế cao su và nền bê tông. Trong đó:

- Thanh ray là kết cấu đầu tiên của hệ tương tác với phương tiện, có tác dụng tiếp nhận tải trọng tàu và phân bố xuống các kết cấu bên dưới;

- Hệ kẹp ray và đệm ray có vai trò giữ ổn định và bảo vệ hệ LVT dưới tác dụng của tải trọng động, truyền tải trọng từ ray xuống tà vẹt;

- Thanh tà vẹt: giữ ổn định cho khoảng cách 2 thanh ray và truyền tải trọng từ ray xuống lớp dưới;

- Đệm đàn nhớt dưới tà vẹt có vai trò tiếp nhận tải trọng phân phối xuống lớp đế cao su, giảm dao động cho kết cấu, đặc biệt là các dao động ở tần số thấp;

- Lớp đế cao su có vai trò bảo vệ các kết cấu phía trên (tà vẹt, đệm tà vẹt), nó truyền tải trọng

xuống lớp nền bê tông. Hình dạng thiết kế và tính chất vật liệu của lớp đế cao su cho phép nó tiếp xúc tốt với tấm đệm đàn nhớt và cùng với các đệm đàn nhớt điều chỉnh cho độ cứng của hệ kết cấu khá yếu dưới tác dụng của tải trọng động.

Tùy theo tính chất của đường, yêu cầu về vận tốc tàu và mức độ an toàn, kết cấu LVT phân thành 3 loại: LVT-Standard, LVT-High Attenuation, LVT-Low Profile. [5]

#### 3.2 Tải trọng tác dụng

- Tải trọng dọc theo thanh ray: xuất hiện do gia tốc tàu, ma sát;

- Tải trọng thẳng đứng: Tải trọng bản thân của tàu;

Khi tàu chạy, tương tác giữa bánh và đường ray sẽ gây ra tác dụng động tại các vị trí có khuyết tật trên ray.

- Tải trọng vuông góc với tuyến ray: Xuất hiện tại những khúc cua của đường ray.

#### 3.3 Các giả thiết tính toán

- Tương tác giữa bánh và đường ray được mô tả bằng tải trọng tác dụng trên ray, là tải trọng di động với vận tốc không đổi. Lực tác dụng theo phương dọc trục ray và phương vuông góc với tuyến ray không được xét đến trong bài toán này. Trong thanh ray chỉ tồn tại tải trọng tác dụng động theo phương thẳng đứng;

- Kết cấu thanh ray được tính toán như dầm liên tục;

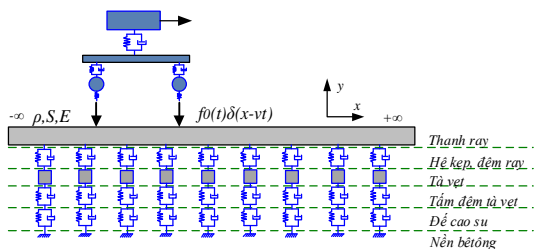
- Bỏ qua ma sát giữa các lớp vật liệu;

- Lớp nền bê tông được coi như cứng tuyệt đối.

3.4 Mô hình hóa

Từ cấu tạo và vật liệu các bộ phận của hệ LVT, kết cấu LVT được mô hình hóa như sau (hình 3):

- Thanh ray: sử dụng mô hình dầm Euler-Bernoulli liên tục;
- Hệ kẹp-đệm ray: là phần tử đàn nhớt, khối lượng của hệ được kể đến trong khối lượng tà vẹt;
- Thanh tà vẹt: kết cấu tà vẹt được thiết kế đảm bảo khả năng chịu lực và truyền tải trọng xuống kết cấu phía dưới. Khối lượng của tà vẹt có vai trò quan trọng trong việc giữ ổn định cho đường ray, tà vẹt được tính toán như vật cứng tuyệt đối có khối lượng;
- Đệm dưới tà vẹt: chế tạo bởi vật liệu đàn nhớt sylomer và được mô hình hóa như phần tử đàn nhớt;
- Đế cao su được tính toán như hệ đàn nhớt (lò xo – cản);
- Nền bê tông được xem là các gối ngàm cứng.



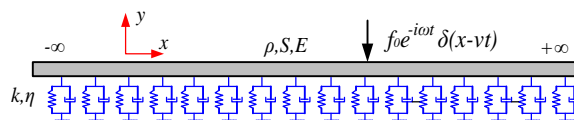
Hình 3. Mô hình hóa kết cấu đường sắt không ballast

Phương trình cân bằng dầm Euler – Bernoulli liên tục trên nền đàn hồi [3]:

$$EIw^{(4)}(t) + m\ddot{w}(t) + c\dot{w}(t) + kw(t) = f(x, t) \quad (1)$$

Trong đó,  $EI$  - độ cứng chống uốn của dầm,  $m$  - khối lượng phân bố theo chiều dài của dầm,  $c$  - độ cản nhớt của nền,  $k$  - độ cứng của nền.

$f(x, t)$  - tải trọng di động trên dầm, với tải trọng có dạng hằng số, hoặc biến thiên theo thời gian và di động với vận tốc không đổi  $v$ , theo tài liệu [3] trang 15, ta có thể biến đổi về dạng:



Hình 4. Mô hình dầm liên tục trên nền đàn nhớt

Các thông số đặc trưng của ray: khối lượng riêng  $\rho$ , mô đun Young  $E$ , tiết diện ngang  $S$ , mô men quán tính  $I$ , hệ số đàn hồi và hệ số đàn nhớt của nền:  $(k, \eta)$ ,  $f_0$  là biên độ của tải trọng.

$$f(x, t) = f_0(t)\delta(x-vt) \quad (2)$$

$f_0(t)$  - hàm tải trọng chỉ phụ thuộc vào thời gian, được xác định qua tương tác giữa bánh tàu và thanh ray.

$\delta(x-vt)$  - hàm Dirac, mô tả vị trí của tải trọng, nó phụ thuộc vào vận tốc, thời gian.

Với hàm tải trọng bất kỳ khả tích trong miền thời gian, bằng phép biến đổi Fourier ta có thể đưa về miền tần số góc theo công thức:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

Như vậy, với mỗi hàm thời gian bất kỳ thỏa mãn điều kiện triển khai Fourier, ta đều biến đổi được về dạng hàm điều hòa trong miền tần số góc  $\omega$ .

Mô hình của hệ kết cấu dao động là hệ nhiều bậc tự do, các cách giải thông thường khá phức tạp. Do đó, ta có thể đơn giản hóa mô hình theo 2 sơ đồ tính: mô hình hệ 1 bậc tự do và mô hình hệ 2 bậc tự do cho phép thực hiện việc tính toán thuận tiện hơn.

4. Mô hình hệ 1 bậc tự do - Dầm Euler-Bernoulli liên tục trên nền đàn nhớt

Cơ sở nghiên cứu mô hình này dựa vào mô hình tính toán dầm liên tục trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng động di chuyển, được trình bày trong [3], chương 13.

Trong mô hình hóa kết cấu bằng phương pháp giải tích, để nghiên cứu dạng chuyển vị của kết cấu thanh ray dưới tác dụng của tải trọng di động, nhằm đơn giản hóa bài toán ta có thể xem toàn bộ hệ kết cấu phía dưới thanh ray như 1 nền đàn nhớt liên tục, tải trọng di động là dạng hàm điều hòa. Khi đó, thanh ray được tính toán như dầm Euler-Bernoulli liên tục chịu tác dụng của tải trọng điều hòa di động. Các bộ phận phía dưới thanh ray được mô tả như 1 nền đàn nhớt (hình 4).

Phương trình cân bằng động lực học của hệ khi bỏ qua tác dụng tĩnh của trọng lượng bản thân ray:

$$\rho_r S_r \dot{w}_r(x,t) + \eta \dot{w}_r(x,t) + k w_r(x,t) + E_r I_r w_r^{(4)}(x,t) = -f_0 e^{-i\omega t} \delta(x-vt) \quad (4)$$

Thực hiện các phép đổi biến:  $X = \mu(x-vt), \mu = \sqrt[4]{\frac{4k}{E_r I_r}}, w(X,t) = w(\mu(x-vt), t)$  (5)

Tìm nghiệm của phương trình dưới dạng:

$$w_r = A e^{i(\lambda X - \omega t)} \Rightarrow \begin{cases} w_r' = i\lambda w_r; & w_r'' = -\lambda^2 w_r; & w_r^{(4)} = \lambda^4 w_r \\ \dot{w}_r = -i\omega w_r; & \dot{w}_r' = \omega\lambda w_r; & \ddot{w}_r = -\omega^2 w_r \end{cases} \quad (6)$$

Biến đổi phương trình, ta thu được phương trình đặc trưng có dạng phương trình (7):

$$\left[ E_r I_r \mu^4 \lambda^4 - \rho_r S_r \mu^2 v^2 \lambda^2 - (2\rho_r S_r \omega + i\eta) \mu v \lambda + (k - i\eta\omega - \rho_r S_r \omega^2) \right] w_r = 0 \quad (7)$$

là phương trình bậc 4 của  $\lambda$ . Chuyển vị của ray tính toán có dạng theo công thức sau:

$$w_r = \sum_{j=1}^4 A_j e^{i(\lambda_j X - \omega t)}, \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (8)$$

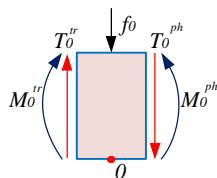
Thực tế, chiều của mỗi thành phần sóng “ $j$ ” phụ thuộc chặt chẽ vào các hệ số  $\alpha_j, \beta_j$ . Do đó ta có thể phân biệt thành 2 thành phần sóng bên trái và 2 thành phần sóng bên phải lực tác dụng [3]. Khi đó, phương trình chuyển vị của ray tại tiết diện “ $O$ ” có dạng:

$$\begin{cases} w_r = e^{-i\omega t} (A_1 e^{i\lambda_1 X} + A_2 e^{i\lambda_2 X}), & X > 0 \\ w_r = e^{-i\omega t} (A_3 e^{i\lambda_3 X} + A_4 e^{i\lambda_4 X}), & X < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_r = e^{-i\omega t} (A_1 e^{\gamma_1 X} + A_2 e^{\gamma_2 X}), & X > 0 \\ w_r = e^{-i\omega t} (A_3 e^{\gamma_3 X} + A_4 e^{\gamma_4 X}), & X < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Trong đó:  $\gamma_j = i\lambda_j = -\beta_j + i\alpha_j$ .

Để xác định các hệ số  $A_j$ , ta sử dụng điều kiện liên tục về chuyển vị góc xoay và nội lực tại tiết diện “ $O$ ” (là tiết diện giả định bất kỳ trên dầm mà ta khảo sát) (hình 5):

$$\begin{aligned} w_r(0^+, t) &= w_r(0^-, t); & w_r'(0^+, t) &= w_r'(0^-, t) \\ M(0^+, t) &= M(0^-, t); & T(0^+, t) + \frac{f_0}{EI} &= T(0^-, t) \end{aligned} \quad (10)$$



Hình 5. Xét điều kiện liên tục tại tiết diện “ $O$ ”

Trong đó các thành phần góc xoay, lực cắt và mô men xác định theo công thức:

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}; M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}; T(x,t) = EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \quad (11)$$

Các hệ số  $A_j$  xác định được từ việc giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & -\lambda_3^2 & -\lambda_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & -\gamma_3^3 & -\gamma_4^3 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_r I_r} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{A\} = \frac{1}{E_r I_r} [\gamma]^{-1} \times \{f\} \quad (12)$$

Biến đổi về dạng hàm tuần hoàn theo định lý Moivre:

$$e^{i\lambda_j X} = e^{(-\beta_j + i\alpha_j)X} = e^{-\beta_j X} (\cos(\alpha_j X) + i \sin(\alpha_j X)) \quad (13)$$

Cuối cùng ta thu được phương trình chuyển vị của ray:

$$\begin{cases} w_r = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^2 A_j e^{-\beta_j X} [\cos(\alpha_j X) + i \sin(\alpha_j X)], & X > 0 \\ w_r = e^{-i\omega t} \sum_{j=3}^4 A_j e^{-\beta_j X} [\cos(\alpha_j X) + i \sin(\alpha_j X)], & X < 0 \end{cases} \quad (14)$$

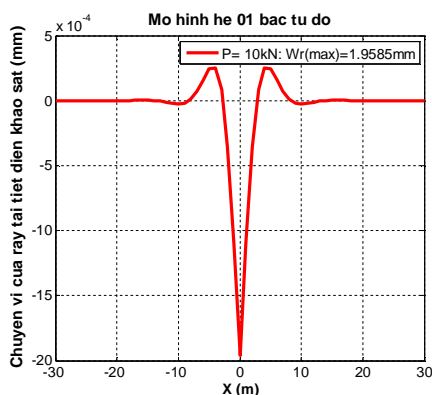
*Ví dụ áp dụng:* Áp dụng tính toán kết cấu với các thông số lấy từ tài liệu [6] như trong bảng 1. Tiến hành phân tích kết cấu trong 2 trường hợp: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Kết quả phân tích thể hiện trong hình 6a (tải trọng tác dụng tĩnh) và hình 6b (tải trọng tác dụng động).

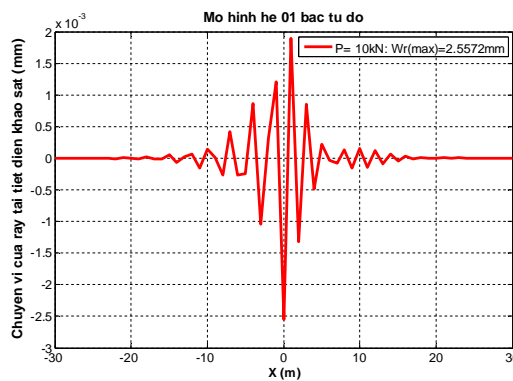
**Bảng 1. Thông số kết cấu**

Tải trọng tác dụng tĩnh:  $P = 10 \text{ kN}$ , vận tốc  $v = 100 \text{ m/s}$   
 Tải trọng tác dụng động:  $P = 10 \text{ kN}$ , vận tốc  $v = 100 \text{ m/s}$ ,  $f = 10 \text{ Hz}$

Cấu kiện	Thông số cơ lý	Giá trị	Đơn vị
Ray	Khối lượng ( $\rho \cdot S$ )	60,34	kg/m
	Độ cứng chống uốn ( $EI$ )	1,23E+07	N/m <sup>2</sup>
Nền đàn nhớt	Độ cứng ( $k$ )	1,60E+07	N/m <sup>2</sup>
	Độ cản nhớt ( $c$ )	6,20E+04	N.s/m <sup>2</sup>



a) Tải trọng tác dụng tĩnh



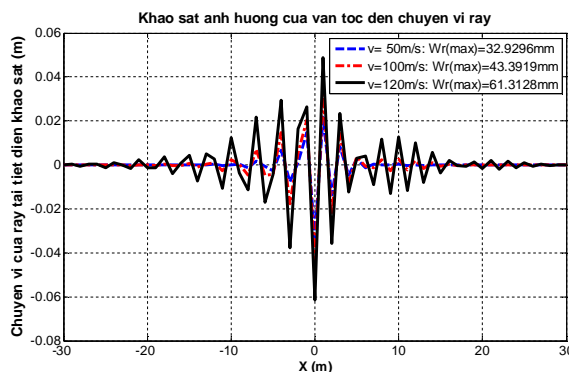
b) Tải trọng tác dụng động,  $f=10\text{Hz}$

**Hình 6. Kết quả chuyển vị tại tiết diện "0"**

Khảo sát ảnh hưởng của vận tốc và tải trọng tàu đến chuyển vị của ray với các giá trị về tải trọng, vận tốc như trong bảng 2 và 3. Kết quả khảo sát thể hiện trong hình 7, hình 8.

**Bảng 2. Kết quả phân tích ảnh hưởng của vận tốc tàu**  
( $P = 170\text{kN}$ ,  $f = 10\text{Hz}$ )

Vận tốc tàu chạy (m/s)	Chuyển vị lớn nhất của ray (m)
50	0,03293
100	0,043392
120	0,0613128

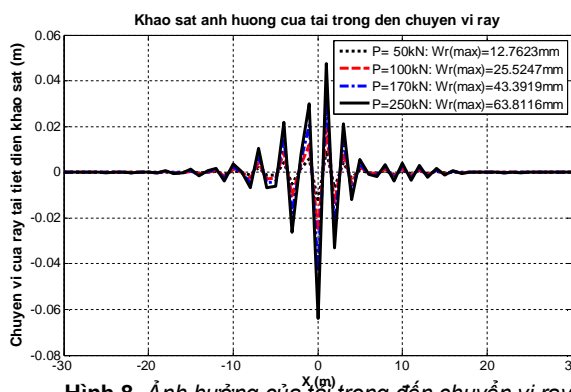


**Hình 7. Ảnh hưởng của vận tốc đến chuyển vị ray**



**Bảng 3. Kết quả phân tích ảnh hưởng của tải trọng tàu**  
( $v = 100 \text{ m/s}$ ,  $f = 10 \text{ Hz}$ )

Vận tốc tàu chạy (m/s)	Chuyển vị lớn nhất của ray (m)
50	2,81E+04
100	5,92E+04
120	7,29E+04



Hình 8. Ảnh hưởng của tải trọng đến chuyển vị ray

**Nhận xét:** Trong mô hình hệ 1 bậc tự do, kết quả tính toán cho thấy dạng chuyển vị tại tiết diện "0" phụ thuộc vào vị trí, tính chất của tải trọng. Khi vị trí của tải trọng gần với tiết diện khảo sát sẽ gây ra ảnh hưởng đáng kể đến chuyển vị tại tiết diện đó. Giá trị chuyển vị đạt cực trị khi tải trọng đặt vào đúng vị trí tiết diện. Khảo sát ảnh hưởng của tải trọng và vận tốc của tàu nhận thấy khi tải trọng tàu, vận tốc tàu chạy tăng thì giá trị chuyển vị tăng theo. Vận tốc tàu khá lớn sẽ gây ảnh hưởng đáng kể đến chuyển vị của thanh ray.

**5. Mô hình hệ 2 bậc tự do**

Thanh tà vẹt được tính toán như hệ khối lượng dao động, đồng thời để nghiên cứu vai trò của các lớp đệm đàn nhớt, ta có thể sử dụng mô hình hệ 2 bậc tự do. Trong mô hình này, thanh ray và tà vẹt được tính

như 2 bậc tự do của hệ. Các bộ phận đàn hồi được mô hình hóa bằng hệ lò xo và cản nhớt.

Thanh ray được tính như dầm liên tục, thanh tà vẹt được tính như khối lượng dao động (hình 9a).

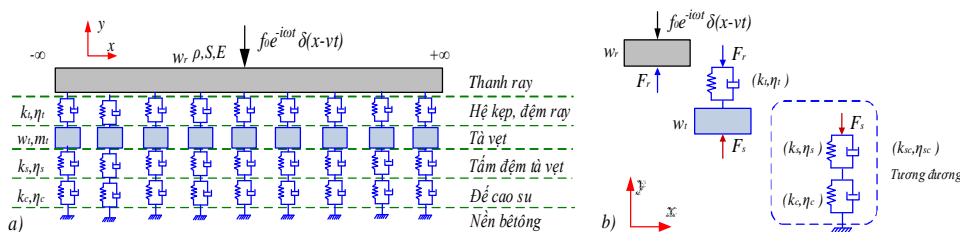
Các thông số của ray: Khối lượng riêng  $\rho_r$ , mô đun đàn hồi Young  $E_r$ , tiết diện ngang  $S_r$ , mô men quán tính  $I_r$ .

Hệ số đàn hồi và cản của hệ kẹp và đệm ray: ( $k_t, \eta_t$ ).

Khối lượng của hệ kẹp ray và tà vẹt: ( $m_t$ ).

Hệ số đàn hồi cả cản của đệm đàn nhớt dưới tà vẹt: ( $k_s, \eta_s$ ).

Hệ số đàn hồi và cả của đế cao su: ( $k_c, \eta_c$ ).



Hình 9. a) Mô hình hệ 2 bậc tự do; b) Phân tích kết cấu tại 1 điểm

Phương trình cân bằng động của ray:

$$\rho_r S_r \left( \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + g \right) + E_r I_r \frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} = F_r - f_0 e^{-i\omega t} \delta(x - vt) \tag{15}$$

Phương trình cân bằng động của tà vẹt:  $m_t (\ddot{w}_t + g) = F_s - F_r \tag{16}$

Trong đó, các lực tác dụng trong hệ:  $F_r, F_s$  được tính theo công thức:

$$F_r = -k_t (w_r - w_t) - \eta_t \left( \frac{\partial w_r}{\partial t} - \frac{\partial w_t}{\partial t} \right); \quad F_s = -k_{sc} w_t - \eta_{sc} \frac{\partial w_t}{\partial t} \tag{17}$$

Với  $k_{sc}, \eta_{sc}$  - độ cứng và hệ số cản tương đương của tấm đệm tà vẹt và đế cao su (hình 9b), được xác định theo công thức:

$$k_{sc}^{-1} = k_s^{-1} + k_c^{-1}; \quad \eta_{sc}^{-1} = \eta_s^{-1} + \eta_c^{-1} \tag{18}$$

Hệ phương trình cân bằng với 2 ẩn số là chuyển vị của ray và tà vẹt:  $w_r(x, t), w_t(x, t)$

$$\begin{cases} \rho_r S_r \ddot{w}_r + \eta_t (\dot{w}_r - \dot{w}_t) + k_t (w_r - w_t) + E_r I_r w_r^{(4)} = -f_0 e^{-i\omega t} \delta(x-vt) - \rho_r S_r g \\ m_t \ddot{w}_t + [\eta_{sc} \dot{w}_t + \eta_t (-\dot{w}_r + \dot{w}_t)] + [k_{sc} w_t + k_t (-w_r + w_t)] = -m_t g \end{cases} \quad (19)$$

Thực hiện phép đổi biến tương tự như mô hình hệ 1 bậc tự do. Biến đổi hệ phương trình vi phân dao động của ray và tà vẹt, tìm nghiệm của hệ phương trình dưới dạng:  $w_r = A e^{i(\lambda X - \omega t)}$ ;  $w_t = B e^{i(\lambda X - \omega t)}$  (20)

Biến đổi và thay dạng nghiệm vào hệ phương trình, viết lại dưới dạng ma trận theo công thức:

$$[K]\{w\} = \{f\} \quad (21)$$

$$\text{Hệ phương trình đặc trưng có dạng: } [K]\{w\} = \{0\} \quad (22)$$

$$\text{Điều kiện tồn tại nghiệm: } \det(K)=0. \quad (23)$$

Phương trình (23) là phương trình bậc 6 của  $\lambda$ , biến đổi phương trình tìm nghiệm của phương trình dưới dạng:

$$\lambda = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6\}; \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (24)$$

$$\text{Phương trình chuyển vị của ray và tà vẹt: } w_r = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^6 A_j e^{i\lambda_j X}; w_t = e^{-i\omega t} \sum_{j=1}^6 B_j e^{i\lambda_j X} \quad (25)$$

Xác định các hệ số  $A_j, B_j$  tương tự hệ 1 bậc tự do, ta chú ý đến điều kiện các hệ số  $e^{\lambda_j X}$  là các tham số độc lập tuyến tính, ta thu được mối quan hệ  $A_j$  và  $B_j$  như công thức (30):

$$B_j = -\frac{i\eta_t \omega + i\eta_t v \lambda_j - k_t}{-m_t \omega^2 - 2m_t v \omega - m_t v^2 \lambda_j^2 - i(\eta_{sc} + \eta_t) \omega - i(\eta_{sc} + \eta_t) v \lambda_j + (k_{sc} + k_t)} A_j = \theta_j A_j \quad (26)$$

Tương tự như phần hệ 1 bậc tự do, chiều của mỗi thành phần sóng “j” phụ thuộc chặt chẽ vào các hệ số  $\alpha_j, \beta_j$ , [3]. Đặt  $\gamma_j = i\lambda_j = -\beta_j + i\alpha_j$

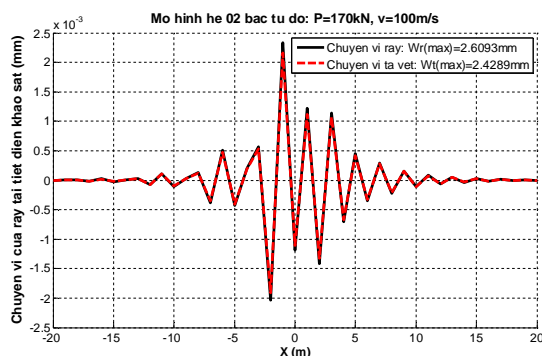
Phương trình chuyển vị của ray và tà vẹt xác định theo công thức (29):

$$\begin{cases} w_r = e^{-i\omega t} (A_1 e^{\gamma_1 X} + A_2 e^{\gamma_2 X} + A_3 e^{\gamma_3 X}); & X > 0 \\ w_r = e^{-i\omega t} (A_4 e^{\gamma_4 X} + A_5 e^{\gamma_5 X} + A_6 e^{\gamma_6 X}); & X < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w_t = e^{-i\omega t} (B_1 e^{\gamma_1 X} + B_2 e^{\gamma_2 X} + B_3 e^{\gamma_3 X}); & X > 0 \\ w_t = e^{-i\omega t} (B_4 e^{\gamma_4 X} + B_5 e^{\gamma_5 X} + B_6 e^{\gamma_6 X}); & X < 0 \end{cases} \quad (27)$$

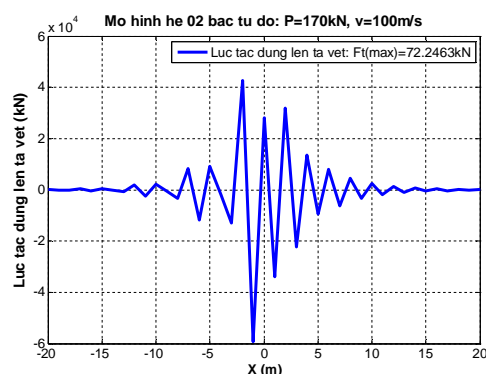
*Ví dụ áp dụng:* Áp dụng tính toán kết cấu với các thông số lấy từ tài liệu [6] như trong bảng 4. Tải trọng tác dụng động: P=170kN, f=10Hz, vận tốc v=100m/s, kết quả chuyển vị của ray, tà vẹt và tải trọng tác dụng lên thanh tà vẹt như hình 10.

**Bảng 4. Thông số kết cấu**

Cấu kiện	Thông số cơ lý	Giá trị	Đơn vị
Ray	Khối lượng (r <sub>0</sub> *S)	60,34	kg/m
	Độ cứng chống uốn (EI)	1,23E+07	N/m <sup>2</sup>
Đệm + Kẹp ray	Độ cứng (k)	3,50E+08	N/m <sup>2</sup>
	Độ cản nhớt (c)	1,83E+05	Ns/m <sup>2</sup>
Tà vẹt	Khối lượng (m)	490	kg/m
Đệm đàn nhớt	Độ cứng (k)	2,00E+08	N/m <sup>2</sup>
	Độ cản nhớt (c)	1,11E+05	Ns/m <sup>2</sup>
Đế cao su	Độ cứng (k)	3,00E+07	N/m <sup>2</sup>
	Độ cản nhớt (c)	1,71E+04	Ns/m <sup>2</sup>



Hình 10. Phân tích chuyển vị ray, tà vẹt



Hình 11. Phân tích tải trọng tác dụng lên tà vẹt

Lực tác dụng lên thanh tà vẹt được xác định thông qua sự khác nhau giữa chuyển vị của ray và chuyển vị của tà vẹt, được xác định thông qua công thức (28) như sau:

$$F_r = -k_t (w_r - w_t) - \eta_t \left( \frac{\partial w_r}{\partial t} - \frac{\partial w_t}{\partial t} \right) \quad (28)$$

Kết quả phân tích tải trọng tác dụng lên thanh tà vẹt được thể hiện trong hình 11.

Phân tích ảnh hưởng của vận tốc tàu chạy đối với các thành phần chuyển vị và tải trọng. Kết quả phân tích thể hiện như bảng 5:

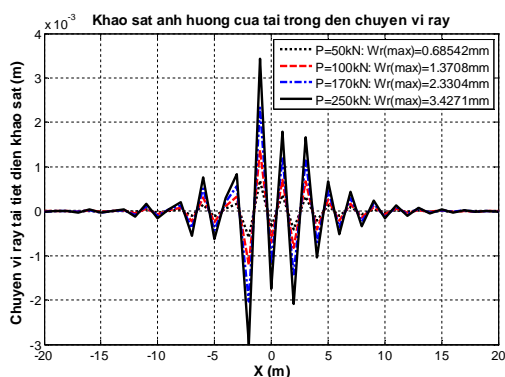
**Bảng 5. Kết quả phân tích ảnh hưởng của vận tốc**

Vận tốc tàu chạy (m/s)	Tải trọng lớn nhất tác dụng lên thanh tà vẹt (N)	Chuyển vị lớn nhất của ray (m)	Chuyển vị lớn nhất của tà vẹt (m)
50	2,81E+04	0,0018	0,0017
100	5,92E+04	0,00233	0,0021
120	7,29E+04	0,0024	0,0022

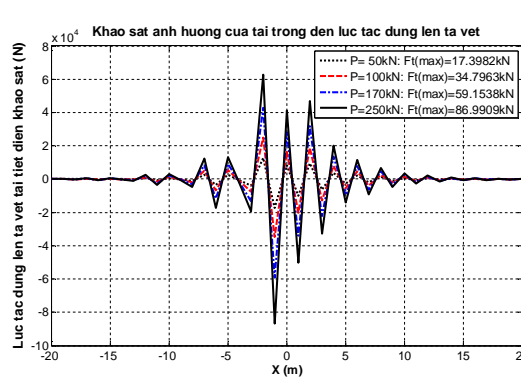
Phân tích ảnh hưởng của tải trọng tàu đến chuyển vị của ray và lực tác dụng lên thanh tà vẹt được thể hiện trong hình 12, kết quả tải trọng lớn nhất tác dụng lên tà vẹt và chuyển vị lớn nhất của ray như trong bảng 6.

**Bảng 6. Kết quả phân tích ảnh hưởng của tải trọng tàu**  
V = 100 m/s, f = 10 Hz

Tải trọng tàu (kN)	Tải trọng lớn nhất tác dụng lên thanh tà vẹt (kN)	Chuyển vị lớn nhất của ray (mm)
50	17,398	0,685
100	34,796	1,371
170	59,154	2,330
250	86,991	3,427



a) Chuyển vị của ray



b) Lực tác dụng lên thanh tà vẹt

Hình 12. Phân tích ảnh hưởng của tải trọng tàu



Nhận xét: Giá trị chuyển vị tại tiết diện nghiên cứu (tiết diện "0") phụ thuộc vào vị trí và độ lớn của tải trọng tàu. Khi vị trí của tải trọng nằm trong phạm vi khá gần tiết diện "0" sẽ gây ra tác động đáng kể đến giá trị chuyển vị tại tiết diện đó. Giá trị của chuyển vị tăng đáng kể khi tải trọng tàu tăng.

Lực tương tác giữa thanh ray và tà vẹt tại tiết diện đang xét (tiết diện "0") phụ thuộc vào vị trí và độ lớn của tải trọng tàu thông qua giá trị chuyển vị tương đối giữa 2 kết cấu thanh ray và tà vẹt.

Vận tốc của tàu gây ảnh hưởng đáng kể đến tải trọng tác dụng lên hệ kết cấu phía dưới thanh ray. Vì vậy cần nghiên cứu thiết kế kết cấu đáp ứng yêu cầu về vận tốc phương tiện trong quá trình khai thác sử dụng.

### 6. Kết luận

Trong mô hình hệ 1 bậc tự do dầm liên tục trên nền đàn hồi, kết quả phân tích dao động cho thấy tính chất, độ lớn của tải trọng tàu, vận tốc của tàu ảnh hưởng đến giá trị chuyển vị của ray. Chuyển vị tại tiết diện đặt tải đạt giá trị cực đại.

Trong mô hình hệ 2 bậc tự do, giá trị chuyển vị đạt cực trị tại vị trí lân cận với điểm đặt tải trọng, điểm này có thể giải thích do ảnh hưởng của bậc tự do dao động thứ 2 trong mô hình này gây ra. Lực tương tác giữa ray và tà vẹt phụ thuộc vào vị trí tải trọng thông qua giá trị chuyển vị tương đối giữa chúng, và đạt giá trị cực trị tại vị trí lân cận điểm đặt tải.

Kết quả phân tích ảnh hưởng vận tốc tàu chạy và độ lớn của tải trọng tàu trong cả hai mô hình cho thấy

chuyển vị và qua đó là lực tương tác giữa các thành phần kết cấu trong hệ phụ thuộc vào vận tốc tàu chạy và tải trọng tàu. Vận tốc tàu khá lớn (cỡ >100m/s) sẽ gây tác động đáng kể đối với hệ kết cấu, do đó trong thiết kế cần chú ý đến các yêu cầu về khai thác sử dụng và loại phương tiện, tốc độ phương tiện.

---

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

---

1. V.H. NGUYEN. Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles. *Thesis, École des Ponts - ParisTech, 3/2002.*
2. Ali AL SHAER. Analyse des déformations permanentes des voies ferrées ballastées – Approche dynamique. *Thesis, École des Ponts - ParisTech, 3/2009.*
3. L. FRÝBA. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. *Thomas Telford, 3rd edition, 1999.*
4. RAJIB UL ALAM UZZAL, WAIZ AHMED and SUBHASH RAKHEJA. Dynamic analysis of railway vehicle-track interactions due to wheel flat with a pitch-plane vehicle model. *Journal of Mechanical Engineering, Vol. ME39, No.2, 12/2008.*
5. Sonnevile Ag Industriezone 2. Low Vibration Track (LVT), le système pour voie sans ballast répondant aux exigences de demain. *Virus IdeenLabor AG, 10/2011.*
6. EuroTunnel, TransManche-Link. Channel Tunnel – Tunnel sous la Manche. *Les plans de la conception, 04/1992.*
7. CHU QUỐC THẮNG. Phương pháp phần tử hữu hạn. *Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 1997.*

**Ngày nhận bài: 2/6/2014.**