

TOÁN VỎ THOẢI CONG HAI CHIỀU DƯƠNG, MẶT BẰNG HÌNH CHỮ NHẬT KÊ BỐN GÓC BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ XẤP XỈ LIÊN TIẾP (XXLT)

TS. NGUYỄN HIỆP ĐỒNG

Đại học Kiến trúc Hà Nội

Tổng quan: Ngày nay, việc ứng dụng phương pháp số để tính toán các công trình trong xây dựng ngày càng phổ biến và đa dạng. Có nhiều phương pháp số khác nhau như: phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), phương pháp sai phân hữu hạn (SPHH), phương pháp xấp xỉ liên tiếp (XXLT),... Mỗi phương pháp đều có những ưu điểm và nhược điểm riêng, nhưng phổ biến hơn cả là phương pháp PTHH. Bài báo này giới thiệu phương pháp XXLT, được phát triển trên cơ sở phương pháp sai phân hữu hạn, để tính mái vòm thoải cong hai chiều mặt bằng hình chữ nhật chịu tải trọng tác dụng phân bố đều. Ưu điểm của phương pháp XXLT là: thuật toán tương đối đơn giản, không cần thiết lập ma trận độ cứng nên khi tính toán không chiếm nhiều bộ nhớ trong máy tính, kết quả có độ chính xác đáng tin cậy, đặc biệt là có thể tính toán với nhiều điều kiện biên khác nhau và với

các dạng tải trọng khác nhau, kể cả tải trọng cục bộ [1], [3],[5].

Từ khóa: Phương pháp số, xấp xỉ liên tiếp, mái vòm thoải, phương trình vi phân.

1. Ứng dụng phương pháp số xấp xỉ liên tiếp (XXLT) để tính mái vòm thoải cong 2 chiều mặt bằng hình chữ nhật

1.1. Phương pháp XXLT

Phương pháp XXLT là phương pháp số được phát triển trên cơ sở phương pháp sai phân hữu hạn do GS. TSKH Gabbasov R. F. người Nga đã nghiên cứu và phát triển thành công vào những thập niên 80 của thế kỷ XX. Bản chất của phương pháp này là giải phương trình vi phân bậc 2 tổng quát có dạng như sau:

$$\alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi^2} + \delta_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi} + \beta_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi \partial \eta} + \sigma_i \frac{\partial \omega_i}{\partial \eta} + \gamma_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \eta^2} \right) = -p \quad (1)$$

trong đó: ω và ω_i - các ẩn; $\alpha, \delta, \beta, \sigma, \gamma, \alpha_i, \delta_i, \beta_i, \sigma_i, \gamma_i$ - các tham số.

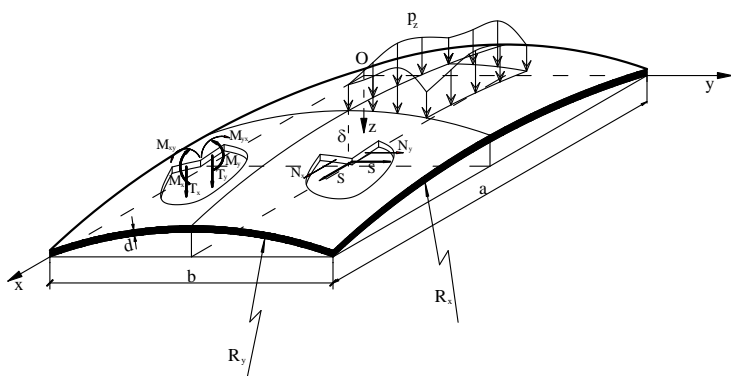
Để giải phương trình vi phân tổng quát (1) GS. TSKH Gabbasov R.F. đã sử dụng phương pháp chia lưới và qua đó thiết lập nên mối quan hệ giữa các điểm, từ đó rút ra được kết quả là chuyển từ phương trình vi phân tổng quát (1) sang hệ phương trình tuyến tính cho mỗi điểm trên lưới.

Phương pháp XXLT này cũng được tác giả nghiên cứu, phát triển và ứng dụng để tính toán mái vòm thoải cong hai chiều dương, mặt bằng hình chữ nhật trong Luận văn tiến sĩ của mình tại đại học Tổng hợp Xây dựng Matxcova năm 2008.

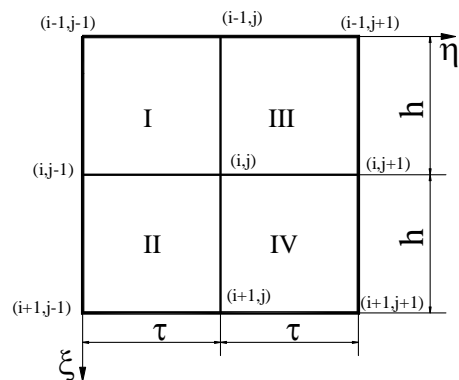
Bài báo này tiếp tục giới thiệu về phương pháp XXLT để tính vòm thoải bê tông cốt thép cong hai chiều nhưng có liên kết kê bốn góc bằng gối tựa không dịch chuyển.

1.2. Thuật toán tính mái vòm cong hai chiều dương, mặt bằng hình chữ nhật

Mái vòm cong hai chiều dương, mặt bằng hình chữ nhật có kích thước $a \times b$, độ vồng ở giữa vòm δ , và có R_x, R_y – bán kính cong tương ứng theo phương x và y , chịu tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng p_z (hình 1).



Hình 1. Sơ đồ tính vỏ



Hình 2. Phân tử lưới

Các phương trình cân bằng ở trạng thái ứng suất - biến dạng của mái vỏ thoải cong hai chiều dương mặt bằng hình chữ nhật ở dạng không đơn vị [4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - C_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - C_2 \frac{\partial w}{\partial \eta} &= 0; \\ \frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} + C_4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -p + C_3 w; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} &= -m, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

trong đó:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Ed}{p_0(1-\nu^2)a^2} \frac{d}{a} U; \quad v = \frac{Ed}{p_0(1-\nu^2)a^2} \frac{d}{a} V; \quad w = \frac{Ed^3}{12 \cdot p_0(1-\nu^2)a^4} W; \\ m &= \frac{M}{p_0 a^2}; \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \quad p = \frac{P_z}{p_0}; \\ C_1 &= 12 \frac{\delta}{d} \bar{\mu}_1; \quad C_2 = 12 \frac{\delta}{d} \bar{\mu}_2; \quad C_3 = 12 \frac{\delta^2}{d^2} \bar{\mu}_3; \quad C_4 = \frac{\delta}{d} \bar{\mu}_1; \quad C_5 = \frac{\delta}{d} \bar{\mu}_2; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

U, V - chuyển vị tiếp tuyến tương ứng theo phương x và y , W - độ võng (chuyển vị theo phương z), a - kích thước đặc trưng; ν - hệ số Poisson; p_0 - giá trị của P_z tại một điểm xác định; d - chiều dày của vỏ; δ - độ võng tại tâm của vỏ (hình 1).

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{M_x + M_y}{1+\nu}; \quad M_x = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]; \quad M_y = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]; \\ \bar{\mu}_1 &= (\chi_\xi + \nu \chi_\eta) \frac{a}{\delta}; \quad \bar{\mu}_2 = (\chi_\eta + \nu \chi_\xi) \frac{a}{\delta}; \quad \bar{\mu}_3 = (\chi_\xi^2 + \chi_\eta^2 + 2\nu \chi_\xi \chi_\eta) \left(\frac{a}{\delta} \right)^2; \\ \chi_\xi &= \frac{1}{R_x} \cdot a; \quad \chi_\eta = \frac{1}{R_y} \cdot a; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

R_x, R_y - bán kính cong tương ứng theo phương x và y ; M_x, M_y - mô men uốn tương ứng theo trục x và trục y ; N_x, N_y - nội lực pháp tương ứng theo phương x và y ; S - nội lực trượt (hình 1), $D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}$ - độ cứng

trụ, $\bar{B} = \frac{Ed}{1-\nu^2}$, E - modul đàn hồi của vật liệu.

Các phương trình vi phân bậc 2 trong hệ (2) chỉ là trường hợp riêng của phương trình vi phân tổng quát (1). Vì vậy các ẩn ω và ω_l trong (1) có vai trò như các ẩn u , v , w và m của hệ (2). Do vậy đối với phương trình đầu

tiên của hệ (2) ta thay thế các ẩn như sau: ω bằng u với các hệ số $\alpha=1$, $\delta=\beta=\sigma=0$, $\gamma = \frac{1-\nu}{2}$, ω_l - bằng v

với các hệ số $\alpha_l=\delta_l=0$, $\beta_l = \frac{1+\nu}{2}$, $\sigma_l=\gamma_l=0$ và ω_2 - bằng w với hệ số $\alpha_2=0$, $\delta_2=-C_1$, $\beta_2=\sigma_2=\gamma_2=0$, còn về phải sẽ thay $p=0$, sau quá trình biến đổi tại các điểm (hình 2) kết quả có dạng sau:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\tau}{h} + \frac{1-\nu}{2} \frac{h}{\tau} \right) u_{i-1,j-1} + \left[10 \frac{\tau}{h} - (1-\nu) \frac{h}{\tau} \right] u_{i-1,j} + \left(\frac{\tau}{h} + \frac{1-\nu}{2} \frac{h}{\tau} \right) u_{i-1,j+1} - \\ & - \left(2 \frac{\tau}{h} - 5(1-\nu) \frac{h}{\tau} \right) u_{i,j-1} - 20 \left(\frac{\tau}{h} + \frac{1-\nu}{2} \frac{h}{\tau} \right) u_{i,j} - \left(2 \frac{\tau}{h} - 5(1-\nu) \frac{h}{\tau} \right) u_{i,j+1} + \\ & + \left(\frac{\tau}{h} + \frac{1-\nu}{2} \frac{h}{\tau} \right) u_{i+1,j-1} + \left[10 \frac{\tau}{h} - (1-\nu) \frac{h}{\tau} \right] u_{i+1,j} + \left(\frac{\tau}{h} + \frac{1-\nu}{2} \frac{h}{\tau} \right) u_{i+1,j+1} + \\ & + \frac{3}{2} (1+\nu) (v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j+1}) + \\ & + \frac{\tau}{2} C_1 (w_{i-1,j-1} + 10w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 10w_{i+1,j} - w_{i+1,j+1}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Hoàn toàn tương tự với ba phương trình vi phân còn lại của hệ (2), kết quả ta có 4 phương trình tuyến tính ứng với các ẩn của điểm (i, j) lần lượt là u_{ij} , $v_{i,j}$, w_{ij} và m_{ij} .

Để giải được hệ bốn phương trình này cần phải kể đến các điều kiện biên liên kết của mái vò. Đối với mái vò kê bốn góc thì liên kết bốn cạnh là tự do còn bốn góc là liên kết khớp cố định.

Điều kiện biên liên kết tự do. Xét với trường hợp $\eta = 0$ khi đó điều kiện sẽ là:

$$s = 0; \quad m^{(\eta)} = 0; \quad q^{(\eta)} = 0. \quad (6)$$

trong đó các lực được viết dưới dạng không đơn vị như sau:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} &= \frac{M_x}{p_0 a^2}; & m^{(\eta)} &= \frac{M_y}{p_0 a^2}; & n^{(\xi)} &= \frac{N_x d}{p_0 a^2}; \\ n^{(\eta)} &= \frac{N_y d}{p_0 a^2}; & s &= \frac{S d}{p_0 a^2}; & q^{(\eta)} &= \frac{Q_y d}{p_0 a^2}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Q_y - lực cắt tổng theo phương y [4].

Để thuận tiện cho việc tính toán hệ (6) được viết dưới dạng sau:

$$\left. \begin{aligned} m^{(\xi)} &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); & m^{(\eta)} &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right); \\ n^{(\xi)} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial v}{\partial \eta} - C_1 w; & n^{(\eta)} &= \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} - C_2 w; \\ s &= \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right); & q^{(\eta)} &= m^{(\eta)} - (1-\nu) w^{\eta \xi \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sử dụng phương pháp số XXLT xây dựng phương trình cho bốn điều kiện trên. Trong phạm vi bài báo này chỉ giới thiệu cách thiết lập điều kiện $q^{(\eta)} = 0$ theo phương pháp số XXLT, các điều kiện còn lại hoàn toàn tương tự.

Từ điều kiện $q^{(n)} = 0$ và sử dụng phương pháp số XXLT sau một quá trình biến đổi, kết quả như sau:

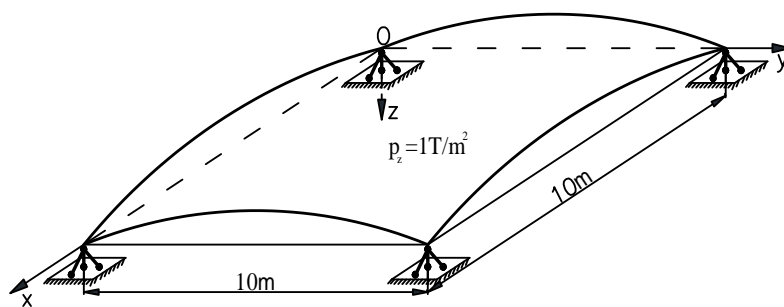
$$\begin{aligned}
 & + \left[(7+6\nu) \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right] m_{i-1,j} + 2 \left(3 \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) m_{i-1,j+1} - \left(\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) m_{i-1,j+2} - \\
 & - 2 \left[(7+6\nu) \frac{\tau}{h} + 4 \frac{h}{\tau} \right] m_{i,j} - 4 \left(3 \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) m_{i,j+1} + 2 \left(\frac{\tau}{h} + 2 \frac{h}{\tau} \right) m_{i,j+2} + \\
 & + \left[(7+6\nu) \frac{\tau}{h} + \frac{h}{\tau} \right] m_{i+1,j} + 2 \left(3 \frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) m_{i+1,j+1} - \left(\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) m_{i+1,j+2} + \\
 & + 4h \left(\frac{\tau}{h} + 2 \frac{h}{\tau} \right) \Delta m_{i,j}^{\xi} + 2h \left(\frac{\tau}{h} - \frac{h}{\tau} \right) \Delta m_{i,j+1}^{\xi} + \\
 & + \frac{\tau C_4}{2} \left(-7u_{i-1,j} - 6u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j+2} + 7u_{i+1,j} + 6u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j+2} \right) + \\
 & + hC_5 \left(-v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1} - 12v_{i,j} + 14v_{i,j+1} - 2v_{i,j+2} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} \right) - \\
 & - \frac{\tau h}{12} C_3 \left\{ \left[5 - \frac{12^2}{\tau^2 h^2 C_3} (1-\nu) \right] w_{i-1,j} + \left[8 + \frac{12^2}{\tau^2 h^2 C_3} (1-\nu) \right] w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j+2} + \right. \\
 & + \left[74 + \frac{12^2}{\tau^2 h^2 C_3} (1-\nu) \right] w_{i,j} + \left[56 - \frac{12^2}{\tau^2 h^2 C_3} (1-\nu) \right] w_{i,j+1} - 10w_{i,j+2} + \\
 & \left. + \left[5 - \frac{12^2}{\tau^2 h^2 C_3} (1-\nu) \right] w_{i+1,j} + \left[8 + \frac{12^2}{\tau^2 h^2 C_3} (1-\nu) \right] w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j+2} \right\} = \\
 & = -\frac{\tau h}{12} \left(5p_{i-1,j} + 8p_{i-1,j+1} - p_{i-1,j+2} + 74p_{i,j} + 56p_{i,j+1} - 10p_{i,j+2} + 5p_{i+1,j} + 8p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j+2} \right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Để thiết lập cho điều kiện biên khi $\xi = 0$, từ phương trình (9) ta thay đổi giá trị của u, v, t, h, i, j bằng v, u, h, t, j, i . Chỉ cần lấy đối xứng với hai điều kiện biên còn lại, kết quả thu được là 4 điều kiện biên cho 4 cạnh liên kết tự do.

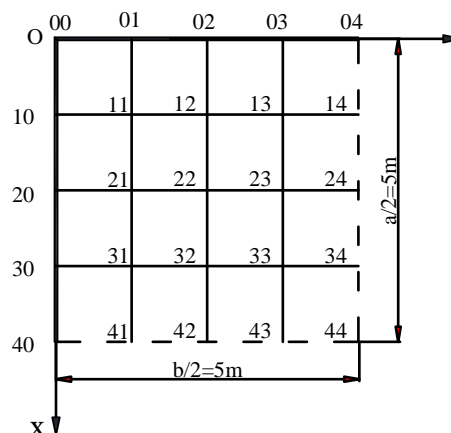
Điều kiện biên cho bốn góc: $u=v=w=m=0$.

1.3. Ví dụ tính toán

Tính toán mái vòm thoải bê tông cốt thép cong hai chiều dương, mặt bằng chữ nhật có liên kết bốn góc là gối tựa cố định chịu tải trọng phân bố đều trên toàn bộ diện tích (hình 3). Mái vòm có các thông số sau: $a=b=10m, \delta=2m, d=0,4m, R_x=R_y=12,5m, E=2,1 \cdot 10^7 T/m^2, \nu=0,3, p_z=1T/m^2$.



Hình 3. Sơ đồ kết cấu



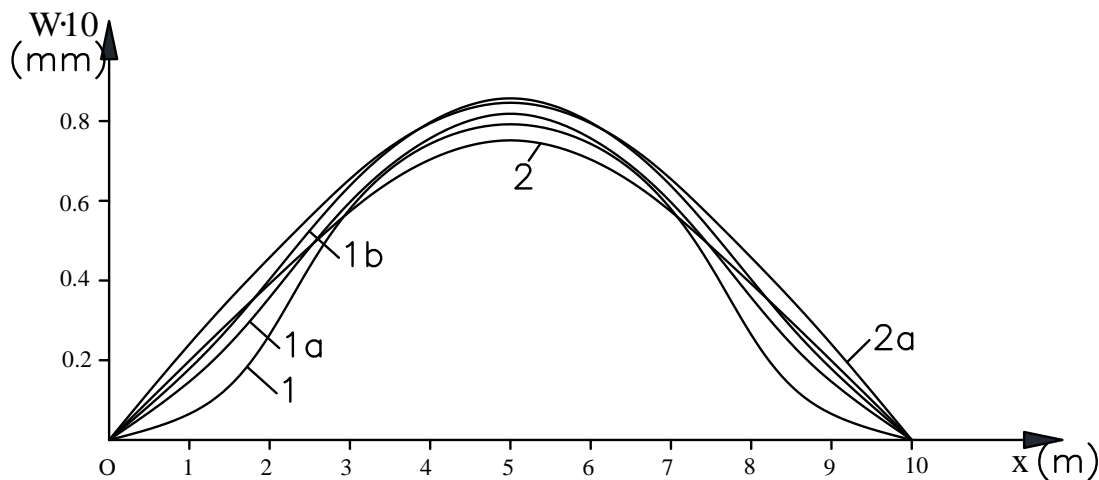
Hình 4. Các điểm chia trên mặt bằng

Bảng 1. Giá trị độ võng W (mm) tại các điểm (hình 4)

Các điểm nút	W (mm)				
	XXLT			PTHH	
	8x8	16x16	32x32	(40x40)	(80x80)
00	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	0,00942	0,01905	0,02286	0,02478	0,02972
11	0,02845	0,03655	0,04130	0,03972	0,04653
20	0,04351	0,04825	0,05253	0,04850	0,05590
21	0,05124	0,05609	0,06100	0,05620	0,06444
22	0,06201	0,06522	0,07030	0,06427	0,07317
30	0,07150	0,07254	0,07658	0,06782	0,07674
31	0,07062	0,07179	0,07655	0,06887	0,07800
32	0,07148	0,07291	0,07795	0,07061	0,07990
33	0,07378	0,07472	0,07976	0,07232	0,08170
40	0,07912	0,08183	0,08570	0,07517	0,08460
41	0,07608	0,07777	0,08244	0,07360	0,08304
42	0,07524	0,07593	0,08092	0,07301	0,08244
43	0,07492	0,07559	0,08061	0,07306	0,08247
44	0,07512	0,07569	0,08069	0,07320	0,08260

Kết quả trong bảng 1 là độ võng W (mm) tại các điểm (hình 4): kết quả trong cột 2 (tính theo XXLT) – W ứng với các trường hợp chia lưới là 8 x 8, 16 x 16 và 32 x 32. Các kết quả này được so sánh với các kết

quả tại các điểm tương ứng tính theo phương pháp PTHH bằng chương trình SCAD Office v.11 với phần tử tam giác và quan hệ giữa các điểm theo phương trình lập phương ứng với lưới 40 x 40 và 80 x 80.



Hình 5. Biểu đồ độ võng W tại mặt cắt biên $y = 0$:
 đường 1, 1a, 1b kết quả tính theo phương pháp XXLT tương ứng với lưới: 8x8, 16x16 và 32x32;
 đường 2, 2a – kết quả tính theo phương pháp PTHH tương ứng với lưới 40x40 và 80x80

Dựa vào số liệu trong bảng 1 và đồ thị (hình 5) ta thấy rằng:

- Kết quả tính toán bằng phương pháp XXLT và phương pháp PTHH có độ sai lệch nhỏ. Tại các điểm giữa nhịp độ sai lệch <3%;

- Kết quả phụ thuộc vào việc chia lưới. Lưới càng mịn thì kết quả càng chính xác (hình 5);
- Kết quả tính theo phương pháp XXLT khi chia lưới 8x8 có kết quả chính xác hơn phương pháp PTHH khi chia lưới 40x40.

2. Kết luận và kiến nghị

- Phương pháp XXLT có thể ứng dụng để tính toán vỏ mỏng với các điều kiện biên khác nhau, các dạng tải trọng khác nhau, thuật toán đơn giản, dễ lập trình, kết quả đáng tin cậy;
- Ngoài việc tính vỏ thoải, phương pháp XXLT còn được ứng dụng để tính toán với nhiều dạng kết cấu khác nhau, các dạng chất tải khác nhau kể cả chất tải cục bộ và với nhiều điều kiện biên khác nhau;
- Phương pháp này cần được phát triển rộng rãi hơn kể cả trong tính toán thiết kế và trong nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN HIỆP ĐỒNG, LÊ THẾ ANH. Ứng dụng phương pháp tính xấp xỉ liên tiếp để tính mái vỏ cong hai chiều bằng bê tông cốt thép. *Hội nghị Khoa học Vật liệu, Kết cấu & Công nghệ Xây dựng 2012, Đại học Kiến trúc Hà Nội, 14/11/2012. Trang 326-332.*
2. ГАББАСОВ Р.Ф. Об одном численном методе расчета пологих оболочек. *Строительная мех. и расчет сооружений, 1976, № 3, с.15–18.*
3. ГАББАСОВ Р.Ф., НГУЕН Х.Д. К расчету пологих оболочек численным методом последовательных аппроксимаций (МПА) // *Вестник МГСУ №1, М., 2008, С. 151–157.*
4. НАЗАРОВ А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. *М.-Л., 1966.*
5. Нгуен Хиеп Донг. Расчет пологих оболочек на действие локальных нагрузок численным методом последовательных аппроксимаций (МПА) // *Одиннадцатая международная межвузовская научно-практическая конференция молодых ученых, аспирантов и докторантов. Сборник докладов. МГСУ – 2008. с. 67-71.*

Ngày nhận bài: 12/5/2014

