

PHÂN TÍCH SỨC CHỊU TẢI CỦA MÓNG NÔNG ĐẶT TRÊN MÁI DỐC BẰNG LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH GIỚI HẠN

TS. Nguyễn Minh Tâm

Trường Đại học Bách khoa TP. HCM

KS. Phạm Quang Tạ, ThS. Võ Minh Thiện

Trường Đại học Kỹ Thuật Công Nghệ TP. HCM

Tóm tắt: Phương pháp phân tích giới hạn tiếp cận từ cận trên (Upper bound) được sử dụng để tính toán sức chịu tải của móng nông đặt trên mái dốc. Đất nền được giả định ứng xử dẻo lý tưởng theo tiêu chuẩn bền Mohr-Coulomb và luật chảy dẻo kết hợp. Phương pháp phần tử hữu hạn tron dựa trên miền (CS – FEM) được dùng để xấp xỉ trường chuyển vị. Cơ chế trượt của nền đất cũng như sức chịu tải cực hạn của móng nông đặt trên mái dốc được xác định bằng chương trình tối ưu Mosek.

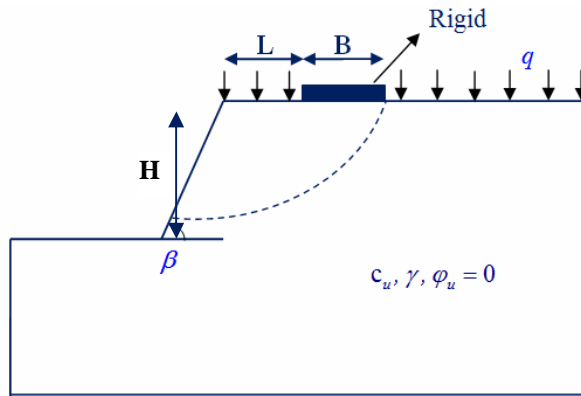
Abstract: In this paper, upper bound limit analysis is applied to investigate the bearing capacity of strip footing placed on slope. The soil is modeled by well-known Mohr-Coulomb failure criterion with the associated flow rule. The cell-based smoothed finite element method (CS-FEM) is used to approximate displacement field. By utilising the Mosek program, failure mechanism and bearing capacity of shallow foundation resting on the slope are determined.

1. Giới thiệu

Việc xác định sức chịu tải của móng nông đặt trên mái dốc là vấn đề rất phức tạp bởi vì nó không những phụ thuộc vào các thông số của nền đất giống như trong trường hợp móng đặt trên mặt đất nằm ngang mà còn phụ thuộc vào sự ổn định của mái dốc. Có hai phương pháp chính được sử dụng để giải quyết vấn đề này là: phương pháp cân bằng giới hạn cân bằng giới hạn, như Meyerhof (1957) [1] đề nghị, và phương pháp phân tích giới hạn dựa trên định đề ổn định do Drucker [2] đề xuất năm (1950). Phân tích giới hạn là một lý thuyết rất mạnh có thể sử dụng cho các bài toán ổn định như ổn định mái dốc, sức chịu tải của nền, áp lực đất lên tường chắn đảm bảo sự nghiêm ngặt về mặt cơ học. Nhờ sự phát triển của máy tính điện tử, phương pháp số, và lý thuyết tối ưu đã mở ra khả năng mới cho lý thuyết phân tích giới hạn. Trên thế giới, phương pháp phân tích giới hạn được sử dụng rộng rãi để giải quyết các bài toán địa kỹ thuật mà nổi bật như tác giả S.W.Sloan [3]. Ở Việt nam, hiện nay phương pháp này mới được tiếp cận để giải quyết một số bài toán ổn định trong lĩnh vực địa kỹ thuật. Gần đây, trong luận văn Thạc sĩ [8], ThS. Nguyễn Chánh Hoàng đã sử dụng lý thuyết phân tích giới hạn kết hợp với phương pháp số (FEM và ES-FEM) để giải quyết một số bài toán ổn định như sức chịu tải của nền, ổn định mái dốc. Vì kết quả phân tích giới hạn phụ thuộc rất nhiều vào kết quả xấp xỉ trường biến dạng, nên trong bài báo này tác giả sẽ sử dụng lý thuyết phân tích giới hạn kết hợp với một phương pháp số khác, phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên miền (CS-FEM) để phân tích bài toán sức chịu tải của móng nông đặt trên mái dốc. Kết quả thu được sẽ được so sánh với kết quả phân tích của ThS. Nguyễn Chánh Hoàng với ES-FEM, kết quả phân tích của J.S.Shiau [6] với FEM T3, và kết quả phân tích bằng phần mềm Plaxis của tác giả bài báo.

2. Đặt vấn đề

Cho một móng nông đặt trên mái dốc như Hình 1. Móng có bề rộng B đặt trên mái dốc với góc dốc β , với chiều cao H , khoảng cách từ mép móng đến đỉnh mái dốc là L . Đất nền được giả định là đồng nhất và ứng xử theo tiêu chuẩn đàn – dẻo lý tưởng Mohr-Coulomb.



Hình 1. Mô hình hình học bài toán móng đặt trên mái dốc

Sức chịu tải cực hạn dưới dạng không thứ nguyên của móng nông đặt trên mái dốc có dạng như sau:

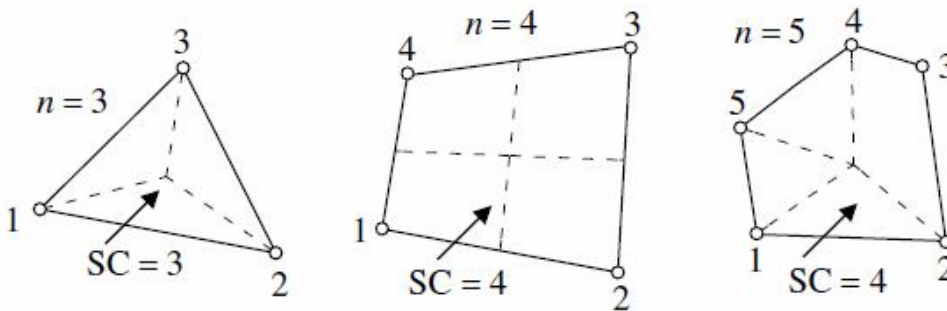
$$\frac{p}{\gamma B} = f\left(\beta, \frac{L}{B}, \frac{c_u}{\gamma B}, \frac{q}{\gamma B}, \frac{H}{B}\right) \quad (1)$$

Với: p là sức chịu tải cực hạn tác động lên móng (kN/m^2), q là phụ tải hông (kN/m^2), γ là trọng lượng riêng của đất, và c_u là lực dính không thoát nước. Lưu ý: $H/B = 3$ được sử dụng trong tất cả các phân tích để sự phá hủy xảy ra ở trên chân mái dốc. Câu hỏi đặt ra là cơ chế trượt và sức chịu tải cực hạn tương ứng của móng trong trường hợp này như thế nào?

3. Tóm tắt phương pháp phần tử hữu hạn trơn dựa trên miền (CS-FEM) [7]

Trong phương pháp phần tử hữu hạn trơn CS-FEM, ta chia miền Ω^e thành những miền "trơn" Ω_C^e con, được định nghĩa :

$$\Omega^e = \Omega_1^e \cup \Omega_2^e \cup \dots \cup \Omega_{nc}^e, \text{ như Hình 2.}$$



Hình 2. Miền trơn được chia dựa trên phần tử tam giác, tứ giác và ngũ giác

Biến dạng trơn tại một phần tử Ω^e bất kỳ thu được như sau:

$$\tilde{\varepsilon}(x_c) = \int_{\Omega^e} \varepsilon(x) \varphi(x, x-x_c) d\Omega \quad (2)$$

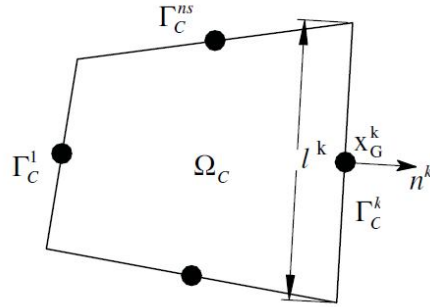
Trong đó φ là hàm trơn thỏa mãn đặc trưng bên dưới

$$\Phi > 0 \text{ và } \int_{\Omega^e} \varphi d\Omega = 1 \quad (3)$$

Để đơn giản, hàm trơn φ được giả định là từng hàm hằng số và được cho bởi:

$$\varphi(x, x-x_c) = \begin{cases} 1/A_C, & x \in \Omega_C^e \\ 0, & x \notin \Omega_C^e \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó A_C là diện tích tấm trơn Ω_C



Hình 3. Hình dạng xác định của miền trơn

Phương pháp phần tử hữu hạn của trường chuyển vị, dạng trơn của gia tốc biến dạng có thể được tính toán nhanh như sau

$$\ddot{\epsilon}^h(x_C) = \tilde{B} \dot{d} \quad (5)$$

Trong đó:

$$\dot{d}^T = [\dot{u}_1, \dot{v}_1, \dots, \dot{u}_n, \dot{v}_n] \quad (6)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,x}(x_C) & 0 & \dots & \tilde{N}_{n,x}(x_C) & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{1,y}(x_C) & \dots & 0 & \tilde{N}_{n,y}(x_C) \\ \tilde{N}_{1,y}(x_C) & \tilde{N}_{1,x}(x_C) & \dots & \tilde{N}_{n,y}(x_C) & \tilde{N}_{n,x}(x_C) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{Với: } \tilde{N}_{I,\alpha}(x_C) = \frac{1}{A_C} \oint_{\Gamma_C} N_I(x) n_\alpha(x) d\Gamma = \frac{1}{A_C} \sum_{k=1}^{n_s} (x_G^k) n_\alpha^k l^k, I=1,2,\dots,n$$

(8)

Trong đó $\tilde{N}_{I,\alpha}$ là dạng trơn của hàm dạng $N_{I,\alpha}$ (Hình 3); n_s là số lượng cạnh của tấm trơn Ω_C biểu diễn trong hình 2; x_C^k là điểm Gauss (điểm giữa) của cạnh biên Γ_C^k với chiều dài l^k và ma trận bề mặt thông thường n^k .

4. Công thức phân tích giới hạn rời rạc dựa trên miền CS-FEM [4]

4.1. Công thức phân tích giới hạn cận trên

Ta xem vật thể cứng - dẻo tuyệt đối trong miền $\Omega_e \in \mathbb{R}^2$ với biên Γ , với lực thể tích g và lực trên biên t . Điều kiện biên ràng buộc về chuyển vị Γ_u được thiết lập, $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$, $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$. Theo lý thuyết cận trên, kết cấu bị sụp đổ khi và chỉ khi tồn tại trường khả dĩ động $u \in U$, sao cho:

$$\int_{\Omega_e} \sum_{I,J} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u) d\Omega < W_{ext}(u) \quad (9)$$

Hay

$$D_p(\epsilon(u)) < W_{ext}(u) \quad (10)$$

Với

$$D_p(\epsilon(u)) = \int_{\Omega_e} d_p(\epsilon) d\Omega \quad (11)$$

$$W_{ext}(u) = \int_{\Omega_e} g^T u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t^T u d\Gamma_t \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

$$U = \{u : u = u_0 \forall x \in \Gamma_u, W_{ext}(u) > 0\} \quad (14)$$

Gọi λ là hệ số tải trọng sụp đổ của lực thể tích \mathbf{g} và lực trên biên \mathbf{t} gây ra, khi đó trường chuyển vị khả dĩ động $\mathbf{u} \in U$

$$D_p(\varepsilon(u)) < \lambda W_{ext}(u) + W_{ext}^0(u) \quad (15)$$

Với $W_{ext}^0(u)$ là công của lực thể tích g_0 và lực trên biên t_0 không nhân với hệ số tải trọng (tĩnh tải). Do vậy cận trên có thể tìm được thông qua bài toán tối ưu:

$$\lambda = \min D_p(\varepsilon(u)) - W_{ext}^0(u) \quad (16)$$

Với những ràng buộc:

$$\begin{cases} u = 0, & u \in \Gamma_u \\ W_{ext} = 1 \end{cases}$$

4.2. Năng lượng thao tác dẻo cho bài toán biến dạng phẳng dựa trên tiêu chuẩn bền Mohr – Coulomb và luật chảy dẻo kết hợp [4,5]

Tiêu chuẩn bền của Mohr - Coulomb có dạng như sau

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 = 0 \quad (17)$$

Do biến dạng dẻo tuân theo quy luật chảy dẻo kết hợp nên

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\mu} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (18)$$

Trong đó: $\dot{\mu} \geq 0$ là hệ số tốc độ gia tăng biến dạng dẻo.

Từ đây, ta có năng lượng tiêu tán của phần tử i

$$D^i_{\dot{\varepsilon}(p)} = A_i c_i \cos(\varphi_i) \sqrt{(\varepsilon_{xx}^i - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \gamma_{xy}^i{}^2} \quad (19)$$

$$\text{Đặt} \quad t_i \geq \sqrt{(\varepsilon_{xx}^i - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \gamma_{xy}^i{}^2} \quad (20)$$

Bài toán tối ưu sẽ trở thành:

$$\lambda = \min \sum_{i=1}^{nel} A_i \cos \varphi_i c_i t_i \quad (21)$$

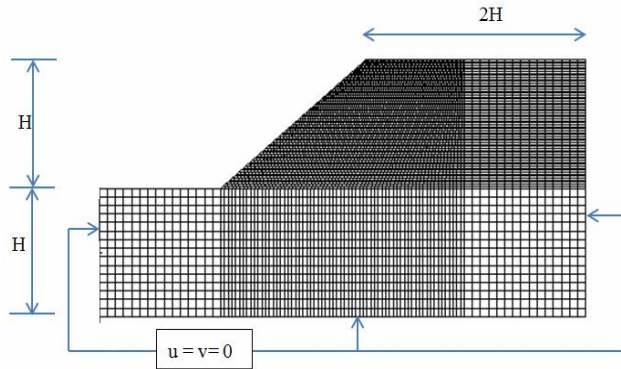
$$\text{Ràng buộc:} \quad \begin{cases} u = 0 & \text{trên biên} \\ W_{ext} = 1 \\ t_i \geq \sqrt{(\varepsilon_{xx}^i - \varepsilon_{yy}^i)^2 + \gamma_{xy}^i{}^2} \\ i = 1, 2, \dots, nel \end{cases}$$

nel: là tổng số miền tron con

5. Kết quả

5.1. Mô hình

Mô hình số theo CS-FEM cho móng nông đặt trên mái dốc trong điều kiện không thoát nước như Hình 4.



Hình 4. Sơ đồ hình học và cách chia lưới

Kết quả thu được từ phân tích theo CS-FEM sẽ được phân tích lại bằng phần mềm Plaxis với sơ đồ hình học tương tự, mô hình vật liệu là Mohr-Coulomb, dạng vật liệu là drained.

5.2. Kết quả phân tích

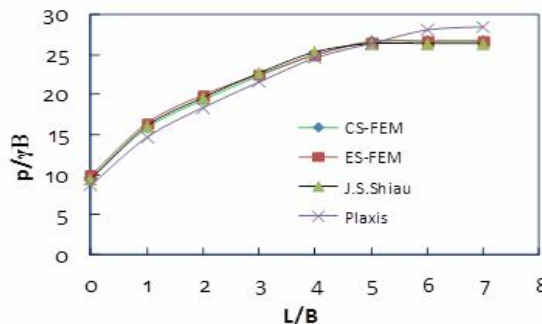
Như trong công thức (1) cho thấy sức chịu tải của móng nông đặt trên mái dốc phụ thuộc vào nhiều yếu tố; ở đây, trong phạm vi bài báo này chỉ khảo sát ảnh hưởng của ba yếu tố đến sức chịu tải là: tỷ số giữa L/B, góc mái dốc β , và tỷ số cường độ $c_u/\gamma B$.

5.2.1. Xét ảnh hưởng của (L/B) đến sức chịu tải của móng ($p/\gamma B$)

Để xét sự ảnh hưởng của khoảng cách đặt móng so với đỉnh dốc (L/B) đến sức chịu tải ($p/\gamma B$), ta phân tích cho các trường hợp $L/B = 0\div 6$, với góc dốc $\beta = 90^\circ$, $q/\gamma B = 0$, và $c_u/\gamma B = 5$. Mô hình sử dụng 8000 phần tử và kết quả được trình bày trong Bảng 1 và Hình 5.

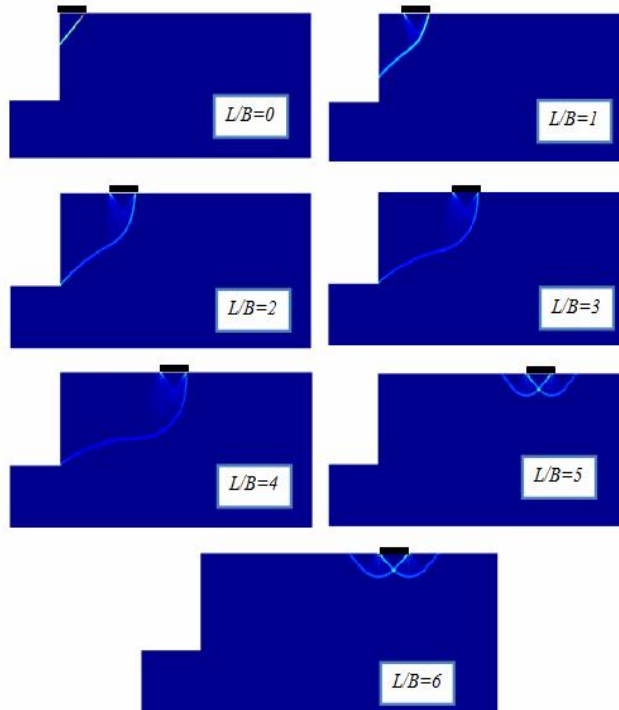
Bảng 1. Sức chịu tải cực hạn ($p/\gamma B$) với ($c_u/\gamma B = 5$ và $q/\gamma B = 0$)

		L/B							
		0	1	2	3	4	5	6	7
$p/\gamma B$	CS-FEM	9.6	15.85	19.36	22.36	24.98	26.69	26.69	26.69
	ES-FEM [8]	9.94	16.45	19.97	22.54	24.98	26.59	26.71	26.71
	J.S.Shiau [6]	9.5	16.12	19.64	22.73	25.35	26.39	26.39	26.39
	Plaxis	8.7	14.7	18.4	21.6	24.6	26.4	28.1	28.5



Hình 5. Sức chịu tải cực hạn ($p/\gamma B$) ứng với các giá trị L/B khác nhau

Kết quả này được so sánh với kết quả của các tác giả khác được phân tích trong cùng một điều kiện: Nguyễn Chánh Hoàng [8] với ES – FEM, J.S.Shiau[6] với FEM T3 sử dụng phần tử bất liên tục, và kết quả phân tích bằng phần mềm Plaxis ($\gamma_{sat} = 20\text{kN/m}^3$, $c_u = 100\text{ kN/m}^2$, $B = 1\text{m}$, $H = 3\text{m}$, $q = 0\text{ kN/m}^2$) của tác giả bài báo. Hình ảnh đường chảy dẻo ứng với các tỷ số L/B khác nhau theo CS – FEM thể hiện ở Hình 6.



Hình 6. Đường chảy dẻo ứng với các giá trị L/B khác nhau

Từ Bảng 1 và Hình 5 cho thấy sức chịu tải cực hạn của móng ($p/\gamma B$) tăng khi khoảng cách từ mép móng đến đỉnh mái dốc (L/B) tăng, và đạt giá trị không đổi khi ($L/B \geq 5$). Điều này có thể dễ hiểu hơn khi chúng ta nhìn vào đường chảy dẻo khi nền bị trượt như trong Hình 6, khi móng càng xa đỉnh dốc thì mặt trượt càng sâu và rộng, chúng tỏ sức chịu tải của móng tăng lên song vẫn do cơ chế ổn định của mái dốc quyết định. Nhưng khi ($L/B \geq 5$) thì cơ chế làm việc của móng và mái dốc tách biệt, lúc này móng làm việc giống như đặt trên mặt đất nằm ngang, vì vậy sức chịu tải đạt giá trị tối đa, và không thay đổi.

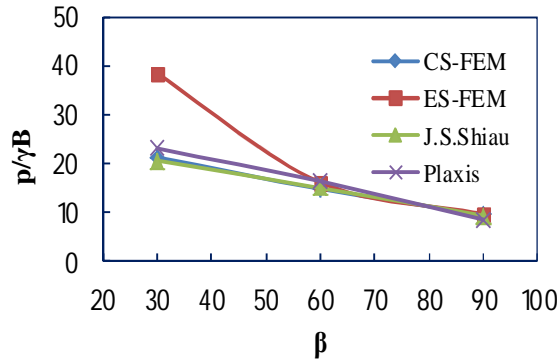
So sánh sức chịu tải cực hạn thu được từ CS-FEM với kết quả của các tác giả khác như trong Bảng 1, ta thấy kết quả của CS-FEM chênh lệch so với kết quả của phân tích bằng ES-FEM của tác giả Nguyễn Chánh Hoàng khoảng 3%, kết quả phân tích bằng FEM T3 của J.S. Shiau khoảng 1.7%, và kết quả phân tích bằng phần mềm Plaxis khoảng 8%. Sự sai khác nhỏ (3%) giữa kết quả CS-FEM với kết quả của ES-FEM và FEM T3 là do sự khác biệt về cách xấp xỉ trường chuyển vị, và mức độ mịn khi chia lưới; còn về bản chất cả ba phương pháp này đều là phương pháp phân tích giới hạn. Đối với kết quả phân tích bằng Plaxis, mặc dù đây là phương pháp số FEM T3, nhưng bản chất của nó là phân tích theo lộ trình nên sự sai khác lớn (8%).

5.2.2. Xét ảnh hưởng của góc dốc β đến sức chịu tải cực hạn của móng ($p/\gamma B$)

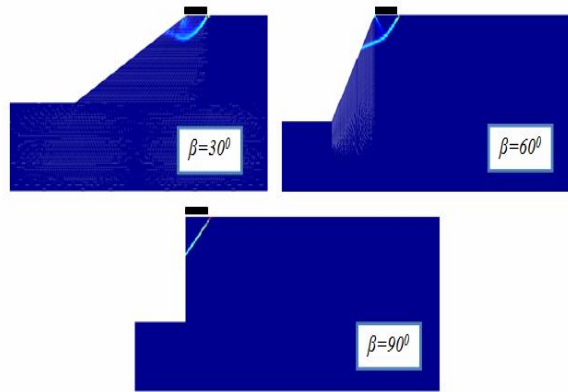
Độ dốc có ảnh hưởng lớn đến sự ổn định mái dốc, do đó cũng ảnh hưởng đến sức chịu tải của móng đặt trên mái dốc. Để xét ảnh hưởng của góc dốc β đến sức chịu tải của móng ($p/\gamma B$) khi đặt trên mái dốc, ta phân tích cho các góc dốc β là 30° , 60° , và 90° , với điều kiện $L/B = 0$, $q/\gamma B = 0$, $c_u/\gamma B = 5$. Mô hình sử dụng 8000 phần tử và kết quả được trình bày trong Bảng 2 và Hình 7. Kết quả này được so sánh với kết quả của các tác giả khác được phân tích trong cùng một điều kiện: Nguyễn Chánh Hoàng [8] với ES – FEM, J.S.Shiou[6] với FEM T3, và kết quả phân tích bằng phần mềm Plaxis ($\gamma_{sat} = 20 \text{ kN/m}^3$, $c_u = 100 \text{ kN/m}^2$, $B = 1\text{m}$, $H=3\text{m}$, $q = 0 \text{ kN/m}^2$) của tác giả. Hình ảnh đường chảy dẻo ứng với các góc β khác nhau theo CS – FEM thể hiện ở Hình 8.

Bảng 2. Sức chịu tải cực hạn ($p/\gamma B$) với

các góc β khác nhau		Góc mái dốc β ($^\circ$)		
		30	60	90
$p/\gamma B$	CS-FEM	21.41	14.92	9.61
	ES-FEM[8]	38.5	16.3	9.8
	J.S.Shiou[6]	20.69	15.16	9.5
	Plaxis	23.2	16.5	8.7



Hình 7. Sức chịu tải cực hạn ($p/\gamma B$) ứng với các góc β khác nhau



Hình 8. Đường chảy dẻo ứng với các góc mái dốc β khác nhau

Từ kết quả trong Bảng 2 và Hình 7 ta thấy khi góc dốc β tăng thì sức chịu tải cực hạn của móng giảm. Điều này là do khi góc dốc β nhỏ độ ổn định của mái dốc lớn hơn, sức kháng cắt mà đất huy động để giữ ổn định mái dốc nhỏ hơn, do vậy phần sức kháng còn lại được sử dụng để đỡ móng lớn hơn. Dựa vào đường chảy dẻo trên Hình 8, ta thấy khi β lớn thì đường chảy dẻo càng dốc, chứng tỏ móng càng dễ trượt, nên sức chịu tải nhỏ.

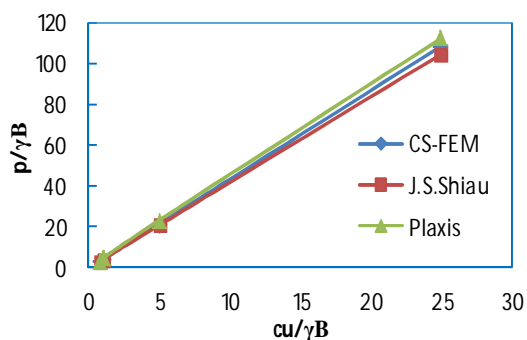
So sánh kết quả sức chịu tải theo CS-FEM với kết quả của các tác giả khác như trong Bảng 2 ta thấy: với kết quả của J.S.Shiau sai số khá (3%), và với kết quả phân tích bằng Plaxis khoảng 10%, và với kết quả theo ES-FEM của tác giả Nguyễn Chánh Hoàng thì với góc 30° sai khác rất lớn (80%), nhưng với góc dốc 60° sai số là 9.2%, và 90° là 1.9%. Rõ ràng kết quả phân tích với góc 30° là có vấn đề.

5.2.3. Xét ảnh hưởng của $c_u/\gamma B$ đến sức chịu tải cực hạn của móng ($p/\gamma B$)

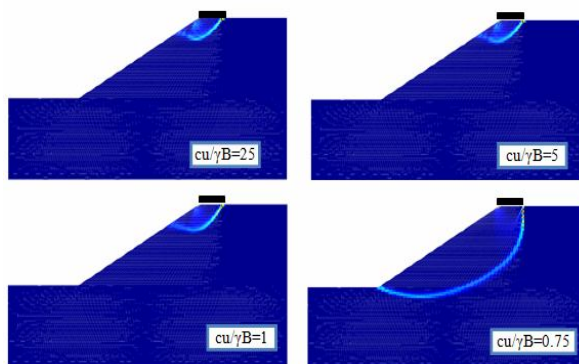
Để xét ảnh hưởng của $c_u/\gamma B$, ta phân tích cho các trường hợp với $c_u/\gamma B$ khác nhau, với điều kiện $L/B = 0$, $q/\gamma B = 0$, $\beta = 30^\circ$. Kết quả được trình bày trong Bảng 3. Để kiểm tra sự chính xác của phương pháp ta so sánh với kết quả đạt được bởi J. S. Shiau[6], và kết quả mô phỏng Plaxis trong cùng một điều kiện. Đường chảy dẻo ứng với các giá trị $c_u/\gamma B$ khác nhau theo CS – FEM thể hiện trong Hình 10.

Bảng 3. Sức chịu tải cực hạn ($p/\gamma B$) với $c_u/\gamma B$ khác nhau

		$c_u/\gamma B$			
		0.75	1	5	25
$p/\gamma B$	CS-FEM	2.81	4.02	21.41	108.17
	J.S.Shiau[6]	2.85	3.93	20.69	104.33
	Plaxis	3.3	4.6	23.2	112



Hình 9. Sức chịu tải cực hạn ($p/\gamma B$) ứng với các giá trị $c_u/\gamma B$ khác nhau



Hình 10. Đường chảy dẻo ứng với các giá trị $c_u/\gamma B$ khác nhau theo CS - FEM

Từ Bảng 3 và Hình 9, ta thấy sức chịu tải tăng tuyến tính với sự gia tăng của $c_u/\gamma B$. Từ hình ảnh đường chảy dẻo trên Hình 10 ta thấy khi $c_u/\gamma B$ tăng đường chảy dẻo thu hẹp dần, độ dốc giảm dần, do khi đất càng yếu ($c_u/\gamma B$ nhỏ) thì mặt trượt sâu. Kết quả phân tích từ CS-FEM lớn hơn so với kết quả phân tích của J.S. Shiao khoảng 3.5%, và nhỏ hơn kết quả phân tích Plaxis khoảng 10%.

6. Kết luận

Từ kết quả phân tích các yếu tố ảnh hưởng đến sức chịu tải của móng nông đặt trên mái dốc theo lý thuyết phân tích giới hạn kết hợp với CS-FEM, và so sánh kết quả đó với kết quả nghiên cứu của một số tác giả khác cho thấy kết quả thu được theo CS-FEM lớn hơn so với kết quả nghiên cứu của J.S. Shiao khoảng 1.7 ÷ 3.5%, nhỏ hơn so với kết quả nghiên cứu của Ths. Nguyễn Chánh Hoàng với ES-FEM khoảng 1.9 ÷ 9.2%, và nhỏ hơn so với kết quả phân tích bằng phần mềm Plaxis khoảng 8÷10%. Sai số giữa các phương pháp CS-FEM, ES-FEM và FEM T3 với phần tử bất liên tục trên biên của J.S. Shiao không nhiều, chủ yếu liên quan đến cách xấp xỉ trường biến dạng và mức độ mịn khi chia lưới, trong khi đó sai số so với kết quả phân tích bằng phần mềm Plaxis là khoảng 8÷10%. Điều này có thể giải thích là do các phương pháp trước dựa trên lý thuyết phân tích giới hạn, trong khi phân tích bằng phần mềm Plaxis tiếp cận theo lộ trình. Trong bài báo này, kết quả phân tích theo J.S. Shiao được sử dụng làm số liệu so sánh chính, vì độ tin cậy cao; dựa vào kết quả này chúng ta thấy phân tích theo CS-FEM có mức độ hội tụ tốt hơn so với phân tích theo ES-FEM. Do vậy, lý thuyết phân tích giới hạn kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn trơn dựa trên miền CS-FEM có thể trở một công cụ rất tốt khi phân tích cho các bài toán ổn định liên quan đến mái dốc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Meyerhof, G. G. (1957). The ultimate bearing capacity of foundations on slopes. *Proceeding 4th International conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering* 1957; 1,384-386.
2. Drucker, D.C., Greenberg, H.J., and Prager, W. Extended Limit Design Theorems for Continuous Media", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 9, 1952, pp 381-389.
3. S. W. Sloan and P. W. Kleeman. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:293{314}, 1995.

4. A. Makrodimopoulos and C. M. Martin. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31:835{865}, 2006.
5. W.F. Chen. Limit analysis and soil plasticity. *Amsterdam: Elsevier* ; 1975.
6. Shiau, J., Merifield, R., Lyamin, A., and Sloan, S. (2011). "Undrained Stability of Footings on Slopes." *Int. J. Geomech.*, 11(5), 381–390.
7. Canh V. Le, H. Nguyen-Xuan, H. Askas, S. Bordas, T. Rabczuk, H. Nguyen-Vinh. A cell – based smoothed finite element method for kinematic limit analysis. *Int. J. Number. Meth. Engng 2009*.
8. Nguyễn Chánh Hoàng. Phân tích giới hạn nền sử dụng phần tử hữu hạn trơn dựa trên cạnh và tối ưu toán học. *Luận văn Thạc sĩ*, Đại học bách khoa TP HCM, 2012.